ICS 35.040
L 80

中 华 人 民 共 和 国 国 家 标 准

GB/T XXXXX.1-XXXX

信息安全技术 SM9 标识密码算法
第 1 部分：总则

Information security technology

Identity-Based cryptographic algorithms SM9 —

Part 1：General

（征求意见稿）

在提交反馈意见时，请将您知道的相关专利连同支持文件一并附上

××××-××-××发布　　××××-××-××实施

中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局
中国国家标准化管理委员会　发布

目　　次

前言 II
引言 III
1 范围 1
2 规范性引用文件 1
3 术语和定义 1
4 符号和缩略语 2
5 有限域和椭圆曲线 3
5.1 有限域 3
5.2 有限域上的椭圆曲线 4
5.3 椭圆曲线群 4
5.4 椭圆曲线多倍点运算 5
5.5 椭圆曲线子群上点的验证 5
5.6 离散对数问题 5
6 双线性对及安全曲线 5
6.1 双线性对 5
6.2 安全性 6
6.3 嵌入次数及安全曲线 6
7 数据类型及其转换 6
7.1 数据类型 6
7.2 数据类型转换 7
8 系统参数及其验证 10
8.1 系统参数 10
8.2 系统参数的验证 11
附录A （规范性附录） 参数定义 12
附录B （资料性附录） 关于椭圆曲线的背景知识 14
附录C （资料性附录） 椭圆曲线上双线性对的计算 21
附录D （资料性附录） 数论算法 29
参考文献 34

前　　言

GB/T XXXXX《信息安全技术 SM9 标识密码算法》分为两个部分：

——第 1 部分：总则

——第 2 部分：算法

本部分为 GB/T XXXXX 的第 1 部分。

本部分依据 GB/T 1.1—2009《标准化工作导则　第 1 部分：标准的结构和编写》给出的规则起草。

请注意本文件的某些内容可能涉及专利。本文件的发布机构不承担识别这些专利的责任。

本部分的附录 A 为规范性附录，附录 B、附录 C、附录 D 为资料性附录。

本部分由国家密码管理局提出。

本部分由全国信息安全标准化技术委员会（SAC/TC260）归口。

本部分起草单位：国家信息安全工程技术研究中心、深圳奥联信息安全技术有限公司、北京国脉信安科技有限公司、武汉大学、上海交通大学、中科院信息工程研究所、北方信息技术研究所。

本部分主要起草人：陈晓、程朝辉、叶顶峰、胡磊、陈建华、路贝可、季庆光、曹珍富、袁文恭、刘平、马宁、袁峰、李增欣、王学进、杨恒亮、张青坡、马艳丽、浦雨三、唐英、孙移盛、安萱。

引　言

A.Shamir 在 1984 年提出了标识密码(Identity-Based Cryptography)的概念，在标识密码系统中，用户的私钥由密钥生成中心(KGC)根据主密钥和用户标识计算得出，用户的公钥由用户标识唯一确定，从而用户不需要通过第三方保证其公钥的真实性。与基于证书的公钥密码系统相比，标识密码系统中的密钥管理环节可以得到适当简化。

1999 年，K.Ohgishi、R.Sakai 和 M.Kasahara 在日本提出了用椭圆曲线对(pairing)构造基于标识的密钥共享方案；2001 年，D.Boneh 和 M.Franklin，以及 R.Sakai、K.Ohgishi 和 M.Kasahara 等人独立提出了用椭圆曲线对构造标识公钥加密算法。这些工作引发了标识密码的新发展，出现了一批用椭圆曲线对实现的标识密码算法，其中包括数字签名算法、密钥交换协议、密钥封装机制和公钥加密算法等。

椭圆曲线对具有双线性的性质，它在椭圆曲线的循环子群与扩域的乘法循环子群之间建立联系，构成了双线性 DH、双线性逆 DH、判定性双线性逆 DH、τ-双线性逆 DH 和τ-Gap-双线性逆 DH 等难题，当椭圆曲线离散对数问题和扩域离散对数问题的求解难度相当时，可用椭圆曲线对构造出安全性和实现效率兼顾的标识密码。

本部分描述必要的数学基础知识与相关密码技术，以帮助实现本标准其它各部分所规定的密码机制；同时，在附录A中给出了本标准定义的公开参数。

信息安全技术 SM9 标识密码算法

第 1 部分：总则

1 范围

本部分规定了必要的数学基础知识与相关密码技术，以帮助实现本标准其它各部分所规定的密码机制。本部分规定使用 F_p(素数 $p>2^{191}$)上椭圆曲线。

本部分适用于商用密码算法中SM9标识密码的实现、应用和检测。

2 规范性引用文件

下列文件对于本文件的应用是必不可少的。凡是注日期的引用文件，仅所注日期的版本适用于本文件。凡是不注日期的引用文件，其最新版本（包括所有的修改单）适用于本文件。

GB/T 32905 信息安全技术 SM3密码杂凑算法

GB/T 32907 信息安全技术 SM4分组密码算法

3 术语和定义

下列术语和定义适用于本文件。

3.1

标识 identity

可唯一确定一个实体身份的信息。标识应由实体无法否认的信息组成，如实体的可识别名称、电子邮箱、身份证号、电话号码等。

3.2

主密钥 master key

系统的根密钥，包括主私钥和主公钥，其中主公钥公开，主私钥由KGC秘密保存。KGC用主私钥和用户的标识生成用户的私钥。在标识密码中，主私钥一般由 KGC 通过随机数发生器产生，主公钥由主私钥结合系统参数产生。

本部分中，签名系统的主密钥与加密系统的主密钥不同。数字签名算法属于签名系统，其主密钥为签名主密钥，密钥交换协议、密钥封装机制和公钥加密算法属于加密系统，其主密钥为加密主密钥。

3.3

密钥生成中心 key generation center；KGC

在SM9标识密码中，负责选择系统参数、生成主密钥并产生用户私钥的可信机构。

4 符号和缩略语

下列符号和缩略语适用于本部分。

cf：椭圆曲线阶相对于 N 的余因子。

cid：用一个字节表示的曲线识别符，用以区分所用曲线的类型。

DLP：有限域上离散对数问题。

$deg(f)$：多项式 $f(x)$的次数。

d_1、d_2：k 的两个因子。

E：定义在有限域上的椭圆曲线。

$ECDLP$：椭圆曲线离散对数问题。

$E(F_q)$：有限域 F_q 上椭圆曲线 E 的所有有理点(包括无穷远点 O)组成的集合。

$E(F_q)[r]$：$E(F_q)$上 r-扭点的集合(即曲线 $E(F_q)$上的 r 阶扭子群)。

e：从 $G_1 \times G_2$ 到 G_T 的双线性对。

eid：用一个字节表示的双线性对 e 的识别符，用以区分所用双线性对的类型。

F_p：包含 p 个元素的素域。

F_q：包含 q 个元素的有限域。

F_q^*：由 F_q 中所有非零元构成的乘法群。

F_{q^m}：有限域 F_q 的 m 次扩域。

G_T：阶为素数 N 的乘法循环群。

G_1：阶为素数 N 的加法循环群。

G_2：阶为素数 N 的加法循环群。

$\gcd(x, y)$：x 和 y 的最大公因子。

k：曲线 $E(F_q)$相对于 N 的嵌入次数，其中 N 是$\#E(F_q)$的素因子。

m：有限域 F_{q^m}关于 F_q 的扩张次数。

$\bmod f(x)$：模多项式 $f(x)$的运算。

$\bmod n$：模 n 运算。例如，23 mod 7=2。

N：循环群 G_1、G_2 和 G_T 的阶，为大于 2^{191} 的素数。

O：椭圆曲线上的一个特殊点，称为无穷远点或零点，是椭圆曲线加法群的单位元。

P：$P=(x_P, y_P)$ 是椭圆曲线上除 O 之外的一个点，其坐标 x_P，y_P 满足椭圆曲线方程。

P_1：G_1 的生成元。

P_2：G_2 的生成元。

$P+Q$：椭圆曲线 E 上两个点 P 与 Q 的和。

p：大于 2^{191} 的素数。

q：有限域 F_q 中元素的数目。

x_P：点 P 的 x 坐标。

$x||y$：x 与 y 的拼接，其中 x 和 y 是比特串或字节串。

$x \equiv y \pmod q$：x 与 y 模 q 同余。亦即，$x \bmod q = y \bmod q$。

y_P：点 P 的 y 坐标。

$\#E(K)$：$E(K)$上点的数目，称为椭圆曲线群 $E(K)$的阶，其中 K 为有限域（包括 F_q 和 F_{q^k}）。

$<P>$：由椭圆曲线上点 P 生成的循环群。

$[u]P$：椭圆曲线上点 P 的 u 倍点。

$[x, y]$：不小于 x 且不大于 y 的整数的集合。

$\lceil x \rceil$：顶函数，不小于 x 的最小整数。例如，$\lceil 7 \rceil = 7, \lceil 8.3 \rceil = 9$。

$\lfloor x \rfloor$：底函数，不大于 x 的最大整数。例如，$\lfloor 7 \rfloor = 7, \lfloor 8.3 \rfloor = 8$。

β：扭曲线参数。

ψ：G_2 到 G_1 的同态映射，满足 $P_1 = \psi(P_2)$。

⊕：长度相等的两个比特串按比特的模2加运算。

5 有限域和椭圆曲线

5.1 有限域

5.1.1 概述

域由一个非空集合F和两种运算共同组成，这两种运算分别为加法(用“+”表示)和乘法(用“·”表示)，并且满足下列算术特性：

a) (F, +)对于加法运算构成加法交换群，单位元用0表示。

b) (F \{0}, ·)对于乘法运算构成乘法交换群，单位元用1表示。

c) 分配律成立：对于所有的$a,b,c \in$F，都有$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$。

若集合F是有限集合，则称域为有限域。有限域的元素个数称为有限域的阶。

5.1.2 素域 F_p

阶为素数的有限域是素域。

设 p 是一个素数，则整数模 p 的全体余数的集合$\{0,1,2,..., p-1\}$关于模 p 的加法和乘法构成一个 p 阶素域，用符号 F_p 表示。

F_p 具有如下性质：

a) 加法单位元是 0；

b) 乘法单位元是 1；

c) 域元素的加法是整数的模 p 加法，即若 $a,b \in F_p$，则 $a + b = (a+b) \bmod p$；

d) 域元素的乘法是整数的模 p 乘法，即若 $a,b \in F_p$，则 $a \cdot b = (a \cdot b) \bmod p$。

5.1.3 有限域 F_q 的 m 次扩域 F_{q^m}

设 q 是一个素数或素数方幂，$f(x)$是多项式环 $F_q[x]$上的一个 m $(m>1)$次不可约多项式(称为约化多项式或域多项式)，商环 $F_q[x]/(f(x))$是含 q^m 个元素的有限域(记为 F_{q^m})，称 F_{q^m} 是有限域 F_q 的扩域，域 F_q 为域 F_{q^m} 的子域，m 为扩张次数。F_{q^m} 可以看成 F_q 上的 m 维向量空间。F_{q^m} 的每一个元可以唯一地写成 $a_0\beta_0+a_1\beta_1+\cdots + a_{m-1}\beta_{m-1}$ 的形式，其中 $a_i \in F_q$，而$\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{m-1}$ 是向量空间 F_{q^m} 在 F_q 上的一组基。

F_{q^m}中的元素可以用多项式基或正规基表示。在本部分中，如果不作特别说明，F_{q^m}中元素均采用多项式基表示。

不可约多项式$f(x)$可取为首一的多项式$f(x)=x^m+f_{m-1}x^{m-1}+\cdots+f_2x^2+f_1x+f_0$ (其中$f_i \in F_q$, $i= 0,1, ...,m-1$)，F_{q^m}中的元素由多项式环 $F_q[x]$中所有次数低于 m 的多项式构成。多项式集合$\{x^{m-1},x^{m-2},...,x,1\}$是 F_{q^m} 在 F_q 上的一组基，称为多项式基。域 F_{q^m} 上的任意一个元素 $a(x) = a_{m-1}x^{m-1}+ a_{m-2}x^{m-2}+\cdots+ a_1x+ a_0$ 在 F_q 上的系数恰好构成了一个 m 维向量，用 $a = (a_{m-1}, a_{m-2}, ..., a_1, a_0)$表示，其中分量 $a_i \in F_q$，$i = 0,1, ...,m-1$。

F_{q^m} 具有如下性质：

a) 零元 0 用 m 维向量(0,...,0,0)表示；

b) 乘法单位元 1 用 m 维向量(0,...,0,1)表示；

c) 两个域元素的加法为向量加法，各个分量用域 F_q 的加法；

d) 域元素 a 和 b 的乘法定义如下：设 a 和 b 对应的 F_q 上多项式为 $a(x)$和 $b(x)$，则 $a \cdot b$ 定义为多项

式$(a(x)\cdot b(x)) \bmod f(x)$对应的向量。

e) 逆元：设 a 对应的 F_q 上多项式为 $a(x)$，a 的逆元 a^{-1} 对应的 F_q 上多项式为 $a^{-1}(x)$，那么有 $a(x)\cdot a^{-1}(x) \equiv 1 \mod f(x)$。

关于有限域的扩域F_{q^m}更多细节，参见附录B.1。

5.2 有限域上的椭圆曲线

有限域 $F_{q^m}(m\geq 1)$上的椭圆曲线是由点组成的集合。在仿射坐标系下，椭圆曲线上点 P (非无穷远点)用满足一定方程的两个域元素 x_P 和 y_P 表示，x_P, y_P 分别称为点 P 的 x 坐标和 y 坐标，并记 $P=(x_P, y_P)$。

本部分描述特征为大素数 p 的域上的曲线。

本部分如果不作特别说明，椭圆曲线上的点均采用仿射坐标表示。

定义在 F_{p^m} 上的椭圆曲线方程为：

$$y^2 = x^3 + ax + b，a, b\in F_{p^m}，且\ 4a^3 + 27b^2 \neq 0。\tag{1}$$

椭圆曲线 $E(F_{p^m})$定义为：

$E(F_{p^m}) = \{(x, y)|\ x, y\in F_{p^m}$，且满足公式(1)$\} \cup \{O\}$，其中 O 是无穷远点。

椭圆曲线 $E(F_{p^m})$上的点的数目用$\#E(F_{p^m})$表示，称为椭圆曲线 $E(F_{p^m})$的阶。

本标准规定素数 $p>2^{191}$。

设 E 和 E'是定义在 F_q 上的椭圆曲线，如果存在一个同构映射 ϕ_d：$E'(F_{q^d})\rightarrow E(F_{q^d})$，其中 d 是使映射存在的最小整数，则称 E'为 E 的 d 次扭曲线。当 $p\geq 5$ 时，d 的取值有三种情况：

a) 若 $a=0,b\neq 0$, 那么 $d=6$，E': $y^2=x^3+\beta b$，$\phi_6 : E' \rightarrow E : (x, y) \quad (\beta^{-1/3}x, \beta^{-1/2}y)$；

b) 若 $b=0,a\neq 0$, 那么 $d=4$，E': $y^2=x^3+\beta ax$，$\phi_4 : E' \rightarrow E : (x, y) \quad (\beta^{-1/2}x, \beta^{-3/4}y)$；

c) 若 $a\neq 0,b\neq 0$, 那么 $d=2$，E': $y^2=x^3+\beta^2 ax+\beta^3 b$，$\phi_2 : E' \rightarrow E : (x, y) \quad (\beta^{-1}x, \beta^{-3/2}y)$。

5.3 椭圆曲线群

椭圆曲线 $E(F_{p^m})$ $(m\geq 1)$上的点按照下面的加法运算规则，构成一个交换群：

a) $O + O = O$;

b) $\forall P = (x, y)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P + O = O + P = P$;

c) $\forall P = (x, y)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P$ 的逆元素$-P = (x, -y)$，$P + (-P) = O$;

d) 两个非互逆的不同点相加的规则：

设 $P_1 = (x_1, y_1)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P_2 = (x_2, y_2)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，且 $x_1 \neq x_2$，

设 $P_3 = (x_3, y_3) = P_1+P_2$，则

$$\begin{cases} x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2, \\ y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1, \end{cases}$$

其中

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}；$$

e) 倍点规则：

设 $P_1= (x_1, y_1)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，且 $y_1 \neq 0$，$P_3 = (x_3, y_3) = P_1+ P_1$，

则

$$\begin{cases} x_3 = \lambda^2 - 2x_1, \\ y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1, \end{cases}$$

其中

$$\lambda = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}。$$

5.4 椭圆曲线多倍点运算

椭圆曲线上同一个点的重复相加称为该点的多倍点运算。设 u 是一个正整数，P 是椭圆曲线上的点，其 u 倍点 $Q = [u]P = P + \underbrace{P + \quad + P}_{u个}$。

多倍点运算可以扩展到 0 倍点运算和负数倍点运算：$[0]P=O$，$[-u]P=[u](-P)$。

多倍点运算可以通过一些技巧有效地实现，参见附录B.2。

5.5 椭圆曲线子群上点的验证

输入：定义 F_{q^m} 上(q 为奇素数，$m\geq1$)椭圆曲线方程的参数 a、b，椭圆曲线 $E(F_{q^m})$上子群 G 的阶 N，F_{q^m} 上的一对元素(x, y)。

输出：若(x, y)是群 G 中的元素，则输出“有效”；否则输出“无效”。

a) 在 F_{q^m} 上验证(x, y)是否满足椭圆曲线方程 $y^2 = x^3 + ax + b$；

b) 令 $Q=(x, y)$，验证$[N]Q = O$；

若以上任何一项验证失败，则输出“无效”；否则，输出“有效”。

5.6 离散对数问题

5.6.1 有限域上离散对数问题(*DLP*)

有限域 F_{q^m} (q 为奇素数，$m\geq1$)的全体非零元素构成一个乘法循环群，记为 $F_{q^m}^*$。$F_{q^m}^*$中存在元素 g，使得 $F_{q^m}^*=\{g^i | 0\leq i\leq q^m-2\}$，称 g 为生成元。$F_{q^m}^*$中元素 a 的阶是满足 $a^t = 1$ 的最小正整数 t。群 $F_{q^m}^*$的阶为 q^m-1，因此 $t \mid q^m-1$。

设乘法循环群$F_{q^m}^*$的生成元为g，$y\in F_{q^m}^*$ ，有限域上离散对数问题是指确定整数$x\in[0, q^m-2]$，使得 $y = g^x$ 在$F_{q^m}^*$上成立。

5.6.2 椭圆曲线离散对数问题(ECDLP)

已知椭圆曲线$E(F_{q^m})$ ($m\geq1$)，阶为n的点$P\in E(F_{q^m})$及$Q\in\langle P\rangle$，椭圆曲线离散对数问题是指确定整数$l\in[0, n-1]$，使得$Q = [l]P$成立。

6 双线性对及安全曲线

6.1 双线性对

设$(G_1，+)$、$(G_2，+)$和$(G_T，\cdot)$是三个循环群，G_1、G_2 和 G_T 的阶均为素数 N，P_1 是 G_1 的生成元，

P_2 是 G_2 的生成元，存在 G_2 到 G_1 的同态映射 ψ 使得 $\psi(P_2)=P_1$；

双线性对 e 是 $G_1\times G_2\rightarrow G_T$ 的映射，满足如下条件：

a) 双线性性：对任意的 $P\in G_1$，$Q\in G_2$，$a, b\in\mathbb{Z}_N$，有 $e([a]P, [b]Q)=e(P, Q)^{ab}$；

b) 非退化性：$e(P_1, P_2)\neq 1_{\mathbb{G}_T}$；

c) 可计算性：对任意的 $P\in G_1$，$Q\in G_2$，存在有效的算法计算 $e(P, Q)$。

本部分所用的双线性对定义在椭圆曲线群上，主要有Weil对、Tate对、Ate对、R-ate对等，相关描述参见附录C。

6.2 安全性

双线性对的安全性主要建立在以下几个问题的难解性基础之上：

问题 1 (双线性逆 DH(BIDH)) 对 $a, b\in[1, N-1]$，给定$([a]P_1, [b]P_2)$，计算 $e(P_1, P_2)^{b/a}$ 是困难的。

问题 2 (判定性双线性逆 DH(DBIDH)) 对 $a, b, r\in[1, N-1]$，区分$(P_1, P_2, [a]P_1, [b]P_2, e(P_1, P_2)^{b/a})$和$(P_1, P_2, [a]P_1, [b]P_2, e(P_1, P_2)^{r})$是困难的。

问题 3 (τ-双线性逆 DH(τ-BDHI)) 对正整数τ和 $x\in[1, N-1]$，给定$(P_1, [x]P_1, P_2, [x]P_2, [x^2]P_2, ..., [x^\tau]P_2)$，计算 $e(P_1, P_2)^{1/x}$ 是困难的。

问题 4 (τ-Gap-双线性逆 DH(τ-Gap-BDHI)) 对正整数τ和 $x\in[1, N-1]$，给定$(P_1, [x]P_1, P_2, [x]P_2, [x^2]P_2, \ldots, [x^\tau]P_2)$和 DBIDH 确定算法，计算 $e(P_1, P_2)^{1/x}$ 是困难的。

上述问题的难解性是SM9标识密码的安全性的重要基础，这些问题的难解性都意味着$\mathbb{G}_1$、$\mathbb{G}_2$和$\mathbb{G}_T$上的离散对数问题难解，选取的椭圆曲线应首先使得离散对数问题难解。

6.3 嵌入次数及安全曲线

设G是椭圆曲线$E(F_q)$的N阶子群，使$N\mid q^k-1$成立的最小正整数k称为子群G相对于N的嵌入次数，也称为曲线$E(F_q)$相对于N的嵌入次数。

设G_1是$E(F_{q^{d_1}})$(d_1整除k)的N阶子群，G_2是$E(F_{q^{d_2}})$(d_2整除k)的N阶子群，则椭圆曲线双线性对的值域G_T是$F_{q^k}^*$的子群，因此椭圆曲线双线性对可将椭圆曲线离散对数问题转化为有限域$F_{q^k}^*$上离散对数问题。嵌入次数越大安全性越高，但双线性对的计算越困难，因而需要采用嵌入次数适中且达到安全性标准的椭圆曲线。本部分规定$q^k>2^{1536}$。

本部分规定选用如下的曲线：

a) 基域q为大于2^{191}的素数、嵌入次数$k=2^i3^j$的常曲线，其中$i>0, j\geq 0$；

b) 基域q为大于2^{768}的素数、嵌入次数$k=2$的超奇异曲线；

对小于2^{360}的N，建议：

c) $N-1$含有大于2^{190}的素因子；

d) $N+1$含有大于2^{120}的素因子。

7 数据类型及其转换

7.1 数据类型

本部分规定的数据类型包括比特串、字节串、域元素、椭圆曲线上的点和整数。

比特串：有序的 0 和 1 的序列。

字节串：有序的字节序列，其中 8 比特为 1 个字节，最左边的比特为最高位。

域元素：有限域 F_{q^m} $(m\geq 1)$中的元素。

椭圆曲线上的点：椭圆曲线 $E(F_{q^m})(m\geq 1)$上的点 P 或者是无穷远点 O，或者是一对域元素(x_P, y_P)，

其中域元素 x_P 和 y_P 满足椭圆曲线方程。

点的字节串表示有多种形式，用一个字节 PC 加以标识。无穷远点 O 的字节串表示是单一的零字节 $PC=00$。非无穷远点 $P=(x_P, y_P)$有如下三种字节串表示形式：

a) 压缩表示形式，$PC=02$ 或 03；

b) 未压缩表示形式，$PC=04$；

混合表示形式，$PC=06$或07。

注：混合表示形式既包含压缩表示形式又包含未压缩表示形式。在实现中，它允许转换到压缩表示形式或者未压缩表示形式。对于椭圆曲线上点的压缩表示形式和混合表示形式，本部分定为可选形式。椭圆曲线上点的压缩表示形式参见附录B.4。

7.2 数据类型转换

7.2.1 数据类型转换关系

图1表示了各种数据类型之间的转换关系，线上的标志是相应数据转换方法所在的条。

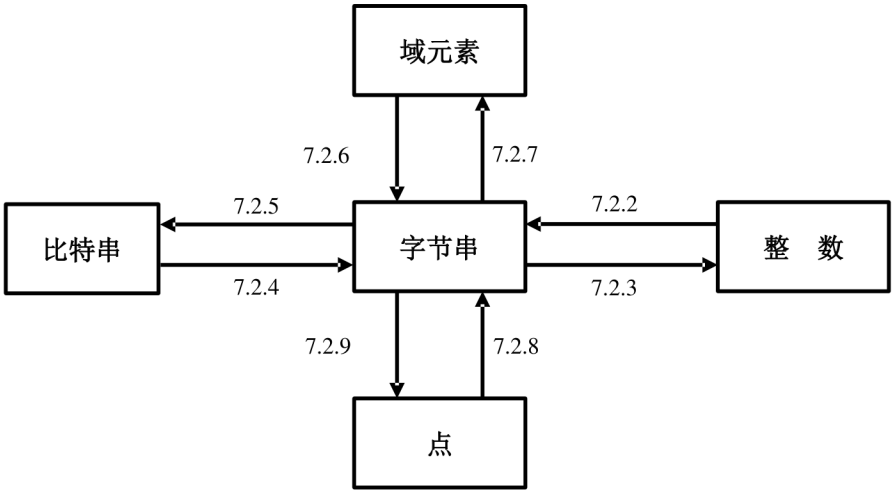

图1 数据类型和转换约定

7.2.2 整数到字节串的转换

输入：非负整数 x，以及字节串的目标长度 l (其中 l 满足 $2^{8l}>x$)。

输出：长度为 l 的字节串 M。

a) 设 $M_{l-1}, M_{l-2}, \ldots, M_0$ 是 M 的从最左边到最右边的字节；

b) M 的字节满足：

$$x=\sum_{i=0}^{l-1}2^{8i}M_i \text{。}$$

7.2.3 字节串到整数的转换

输入：长度为 l 的字节串 M。

输出：整数 x。

a) 设 $M_{l-1}, M_{l-2}, \ldots, M_0$ 是 M 的从最左边到最右边的字节；

b) 将 M 转换为整数 x：

$$x=\sum_{i=0}^{l-1}2^{8i}M_i\text{。}$$

7.2.4 比特串到字节串的转换

输入：长度为 n 的比特串 s。

输出：长度为 l 的字节串 M，其中 $l=\lceil n/8\rceil$。

a) 设 $s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots, s_0$ 是 s 从最左边到最右边的比特；

b) 设 $M_{l-1}, M_{l-2}, \ldots, M_0$ 是 M 从最左边到最右边的字节，则
$M_i=s_{8i+7}\, s_{8i+6} \ldots s_{8i+1}\, s_{8i}$，其中$0\le i<l$，当$8i+j\ge n$，$0<j\le 7$时，$s_{8i+j}=0$。

7.2.5 字节串到比特串的转换

输入：长度为 l 的字节串 M。

输出：长度为 n 的比特串 s，其中 $n=8l$。

a) 设 $M_{l-1}, M_{l-2}, \ldots, M_0$ 是 M 从最左边到最右边的字节；

b) 设 $s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots, s_0$ 是 s 从最左边到最右边的比特，则 s_i 是 M_j 右起第 $i-8j+1$ 比特，其中 $j=\lfloor i/8\rfloor$。

7.2.6 域元素到字节串的转换

输入：$F_{q^m}(m\ge 1)$中的元素 $\alpha=(a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_1, a_0)$，$q=p$。

输出：长度 l 的字节串 S，其中 $l=\lceil \log_2 q/8\rceil\times m$。

a) 若 $m=1$，则$\alpha=a_0(q=p)$，α 必为区间$[0, q-1]$中的整数，按 7.2.2 的细节把α转换成长度为 l 的字节串 S；

b) 若 $m>1$，则$\alpha=(a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_1, a_0)\ (q=p)$，其中 $a_i\in F_q$，$i=0,1,\ldots,m-1$；

   1) 置 $r=\lceil \log_2 q/8\rceil$；

   2) 对 i 从 $m-1$ 到 0 执行：

      按 7.2.2 的细节把 $a_i(q=p)$转换成长度为 r 的字节串 s_i；

   3) $S=s_{m-1}\|s_{m-2}\|\ldots\|s_0$。

7.2.7 字节串到域元素的转换

情形 1：转换为基域中元素

输入：域 F_q，$q=p$，长度为 l 的字节串 S，$l=\lceil \log_2 q/8\rceil$。

输出：F_q 中的元素 α。

若 $q=p$，则按 7.2.3 的细节将 S 转换为整数 α，若 $\alpha\notin[0, q-1]$，则报错；

情形 2：转换为扩域中元素

输入：域 $F_{q^m}(m\ge 2)$，$q=p$，长度为 l 的字节串 S，其中 $l=\lceil \log_2 q/8\rceil\times m$。

输出：F_{q^m} 中的元素 α。

a) 将字节串 S 平均分成 m 段，每段长度为 l/m，记作 $S=(S_{m-1}, S_{m-2}, \ldots, S_1, S_0)$；

b) 对 i 从 $m-1$ 到 0 执行：

   按 7.2.3 的细节将 S_i 转换为整数 a_i，若 $a_i\notin[0, q-1]$，则报错；

c) 若$q=p$，输出$\alpha=(a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_1, a_0)$。

7.2.8 点到字节串的转换

点到字节串的转换分为两种情形：一种是在计算过程中，将椭圆曲线点转换为字节串后才能作为某

个函数(如杂凑函数)的输入，这种情况下只需直接将点转换为字节串；一种是在传输或存储椭圆曲线点时，为了减少传输的量或存储空间，可采用点的压缩或混合压缩表示形式，这种情况下需要加入一个字节的识别符 PC 来指示点的表示形式。下面分两种情况说明详细的转换过程。

情形 1：直接转换

输入：椭圆曲线 $E(F_{q^m})(m\geq 1)$上的点 $P=(x_P, y_P)$，且 $P\neq O$。

输出：长度为 $2l$ 的字节串 $X_1\|Y_1$。(当 $m=1$ 时，$l=\lceil \log_2 q/8\rceil$；当 $m>1$ 时，$l=\lceil \log_2 q/8\rceil\times m$。)

a) 按 7.2.6 中的细节把域元素 x_P 转换成长度为 l 的字节串 X_1；

b) 按 7.2.6 中的细节把域元素 y_P 转换成长度为 l 的字节串 Y_1；

c) 输出字节串 $X_1\|Y_1$。

情形 2：添加一字节识别符 *PC* 的转换

输入：椭圆曲线 $E(F_{q^m})(m\geq 1)$上的点 $P=(x_P, y_P)$，且 $P\neq O$。

输出：字节串 PO。若选用未压缩表示形式或混合表示形式，则输出字节串长度为 $2l+1$；若选用压缩表示形式，则输出字节串长度为 $l+1$。(当 $m=1$ 时，$l=\lceil \log_2 q/8\rceil$；当 $m>1$ 时，$l=\lceil \log_2 q/8\rceil\times m$。)

a) 按 7.2.6 中的细节把域元素 x_P 转换成长度为 l 的字节串 X_1；

b) 若选用压缩表示形式，则：

   1) 计算比特 $\tilde{y}_P$；(参见附录 B.4。)

   2) 若 $\tilde{y}_P=0$，则令 $PC=02$；若 $\tilde{y}_P=1$，则令 $PC=03$；

   3) 字节串 $PO=PC\|X_1$；

c) 若选用未压缩表示形式，则：

   1) 按 7.2.6 的细节把域元素 y_P 转换成长度为 l 的字节串 Y_1；

   2) 令 $PC=04$；

   3) 字节串 $PO=PC\|X_1\|Y_1$；

d) 若选用混合表示形式，则：

   1) 按 7.2.6 的细节把域元素 y_P 转换成长度为 l 的字节串 Y_1；

   2) 计算比特 $\tilde{y}_P$；(参见附录 B.4。)

   3) 若 $\tilde{y}_P=0$，则令 $PC=06$；若 $\tilde{y}_P=1$，则令 $PC=07$；

   4) 字节串 $PO=PC\|X_1\|Y_1$。

7.2.9 字节串到点的转换

字节串到点的转换是 7.2.8 的逆过程。下面也分两种情况加以说明。

情形 1：直接转换

输入：定义 $F_{q^m}(m\geq 1)$上椭圆曲线的域元素 a、b，长度为 $2l$ 的字节串 $X_1\|Y_1$，X_1、Y_1 的长度均为 l (当 $m=1$ 时，$l=\lceil \log_2 q/8\rceil$；当 $m>1$ 时，$l=\lceil \log_2 q/8\rceil\times m$)。

输出：椭圆曲线上的点 $P=(x_P, y_P)$，且 $P\neq O$。

a) 按 7.2.7 的细节把字节串 X_1 转换成域元素 x_P;

b) 按 7.2.7 的细节把字节串 Y_1 转换成域元素 y_P。

情形 2：包含一字节识别符 *PC* 的字节串的转换

输入：定义 $F_{q^m}(m\geq 1)$上椭圆曲线的域元素 a、b，字节串 PO。若选用未压缩表示形式或混合表示形式，则字节串 PO 长度为 $2l+1$；若选用压缩表示形式，则字节串 PO 长度为 $l+1$(当 $m=1$ 时，$l=$

$\lceil \log_2 q/8 \rceil$；当 $m>1$ 时，$l=\lceil \log_2 q/8 \rceil \times m$)。

输出：椭圆曲线上的点 $P=(x_P, y_P)$，且 $P \neq O$。

a) 若选用压缩表示形式，则 $PO=PC\|X_1$；若选用未压缩表示形式或混合表示形式，则 $PO=PC\|X_1\|Y_1$，其中 PC 是单一字节，X_1 和 Y_1 都是长度为 l 的字节串；

b) 按 7.2.7 的细节把字节串 X_1 转换成域元素 x_P；

c) 若选用压缩表示形式，则：

   1) 检验 $PC=02$ 或者是 $PC=03$，若不是这种情形，则报错；

   2) 若 $PC=02$，则令 $\tilde{y}_P=0$；若 $PC=03$，则令 $\tilde{y}_P=1$；

   3) 将 $(x_P, \tilde{y}_P)$ 转换为椭圆曲线上的一个点 (x_P, y_P)；(参见附录 B.4。)

d) 若选用未压缩表示形式，则：

   1) 检验 $PC=04$，若不是这种情形，则报错；

   2) 按 7.2.7 的细节把字节串 Y_1 转换成域元素 y_P；

e) 若选用混合表示形式，则：

   1) 检验 $PC=06$ 或者 $PC=07$，若不是这种情形，则报错；

   2) 执行步骤 e.2.1)或者 e.2.2)：

      - 按 7.2.7 的细节把字节串 Y_1 转换成域元素 y_P；
      - 若 $PC=06$，则令 $\tilde{y}_P=0$，否则令 $\tilde{y}_P=1$；

        将 $(x_P, \tilde{y}_P)$ 转换为椭圆曲线上的一个点(x_P, y_P)；(参见附录 B.4。)

f) 验证(x_P, y_P)是否满足曲线方程，若不满足，则报错；

g) $P=(x_P, y_P)$。

8 系统参数及其验证

8.1 系统参数

系统参数包括：

a) 曲线的识别符 cid，用一个字节表示：0x10 表示 F_q(素数 $q>3$)上常曲线，0x11 表示 F_q 上超奇异曲线，0x12 表示 F_q 上常曲线及其扭曲线；

b) 椭圆曲线基域 F_q 的参数：基域参数为大于 3 的素数 q；

c) F_q 中的两个元素 a 和 b，它们定义椭圆曲线 E 的方程：$y^2=x^3+ax+b$；扭曲线参数β(若 cid 的低 4 位为 2)；

d) 余因子 cf 和素数 N，其中 $cf \times N=\#E(F_q)$， $N>2^{191}$ 且 N 不整除 cf，如果 N 小于 2^{360}，建议 $N-1$ 含有大于 2^{190} 的素因子，$N+1$ 含有大于 2^{120} 的素因子；

e) 曲线 $E(F_q)$相对于 N 的嵌入次数 k (N 阶循环群$(G_T, \cdot) \subset F_{q^k}^*$)，规定 $q^k>2^{1536}$；

f) N 阶循环群$(G_1, +)$的生成元 $P_1=(x_{P_1}, y_{P_1})$，$P_1 \neq O$；

g) N 阶循环群$(G_2, +)$的生成元 $P_2=(x_{P_2}, y_{P_2})$，$P_2 \neq O$；

h) 双线性对 e：$G_1 \times G_2 \rightarrow G_T$，用一个字节的识别符 eid 表示：0x01 表示 Tate 对，0x02 表示 Weil 对，0x03 表示 Ate 对，0x04 表示 R-ate 对；

i) (选项)参数 d_1, d_2，其中 d_1, d_2 整除 k；

j) (选项)G_2 到 G_1 的同态映射ψ，使得 $P_1=\psi(P_2)$。

k) (选项)BN 曲线的基域特征 q，曲线阶 r，Frobenius 映射的迹 tr 可通过参数 t 来确定，t 至少达

到 63 比特。

本规范规定的具体参数见附录 A。

8.2 系统参数的验证

下面的条件应由系统参数的生成者加以验证。这些条件也能由系统参数的用户验证。

输入：系统参数集合。

输出：若所有参数有效，则输出“有效”；否则输出“无效”。

a) 验证 q 是大于 3 的素数(参见附录 D.1.5)；

b) 验证 a, b 是区间[0，$q-1$]中的整数；

c) 验证在 F_q 上 $4a^3+27b^2 \neq 0$；若 cid 的低 4 位为 2，验证β是非平方元(参见附录 D.1.4.3.1)；

d) 验证 N 为大于 2^{191} 的素数且 N 不整除 cf，如果 N 小于 2^{360}，验证 $N-1$ 含有大于 2^{190} 的素因子，$N+1$ 含有大于 2^{120} 的素因子；

e) 验证$|q+1-cf\times N|<2q^{1/2}$；

f) 验证 $q^k > 2^{1536}$，且 k 为使 $N|(q^m-1)$成立的最小正整数 m；

g) 验证(x_{P_1}, y_{P_1})是群 G_1 中的元素；

h) 验证(x_{P_2}, y_{P_2})是群 G_2 中的元素；

i) 验证 $e(P_1, P_2)\in F_{q^k}^*\backslash\{1\}$，且 $e(P_1, P_2)^N=1$；

j) （选项）验证 d_1, d_2 整除 k；

k) （选项）验证 $P_1=\psi(P_2)$；

l) （选项）验证 t 至少达到 63 比特。

若以上任何一项验证失败，则输出“无效”；否则，输出“有效”。

附　录　A
（规范性附录）
参数定义

A.1　系统参数

本部分使用256位的BN曲线。

椭圆曲线方程：$y^2 = x^3 + b$。

曲线参数：

参数 t ：60000000 0058F98A

迹 $\mathrm{tr}(t) = 6t^2 + 1$：D8000000 019062ED 0000B98B 0CB27659

基域特征 $q(t) = 36t^4 + 36t^3 + 24t^2 + 6t + 1$：

B6400000 02A3A6F1 D603AB4F F58EC745 21F2934B 1A7AEEDB E56F9B27 E351457D

方程参数 b：05

群的阶 $N(t) = 36t^4 + 36t^3 + 18t^2 + 6t + 1$：

B6400000 02A3A6F1 D603AB4F F58EC744 49F2934B 18EA8BEE E56EE19C D69ECF25

余因子 cf：1

嵌入次数 k：12

扭曲线的参数 β：$\sqrt{-2}$

k 的因子 $d_1=1, d_2=2$

曲线识别符 cid：0x12

群 $\mathbb{G}_1$ 的生成元 $P_1 = (x_{P1}, y_{P1})$：

坐标 x_{P1}：93DE051D 62BF718F F5ED0704 487D01D6 E1E40869 09DC3280 E8C4E481 7C66DDDD

坐标 y_{P1}：21FE8DDA 4F21E607 63106512 5C395BBC 1C1C00CB FA602435 0C464CD7 0A3EA616

群 $\mathbb{G}_2$ 的生成元 $P_2 = (x_{P2}, y_{P2})$：

坐标 x_{P2}：(85AEF3D0 78640C98 597B6027 B441A01F F1DD2C19 0F5E93C4 54806C11 D8806141 ,
37227552 92130B08 D2AAB97F D34EC120 EE265948 D19C17AB F9B7213B AF82D65B)

坐标 y_{P2}：(17509B09 2E845C12 66BA0D26 2CBEE6ED 0736A96F A347C8BD 856DC76B 84EBEB96 ,
A7CF28D5 19BE3DA6 5F317015 3D278FF2 47EFBA98 A71A0811 6215BBA5 C999A7C7)

双线性对的识别符 eid：0x04

A.2　扩域元素的表示

$F_{q^{12}}$ 的 1-2-4-12 塔式扩张：

(1) $F_{q^2}[u] = F_q[u]/(u^2-\alpha)$,　$\alpha = -2$；

(2) $F_{q^4}[v] = F_{q^2}[v]/(v^2-\xi)$,　$\xi = u$；

(3) $F_{q^{12}}[w] = F_{q^4}[w]/(w^3-v)$,　$v^2 = \xi$；

其中，

第(1)进行二次扩张的约化多项式为：$x^2-\alpha, \alpha = -2$；

第(2)进行二次扩张的约化多项式为：$x^2 - u, u^2 = \alpha, u = \sqrt{-2}$；

第(3)进行三次扩张的约化多项式为：$x^3 - v, v^2 = u, v = \sqrt{\sqrt{-2}}$；

u 属于 F_{q^2}，表示为(1 , 0)，左边是第 1 维(高维)，右边是第 0 维（低维）。

v 属于 F_{q^4}，表示为(0 , 1 , 0 , 0)，其中左边(0 , 1)是 F_{q^4} 中元素以 F_{q^2} 表示的第 1 维（高维），右边(0 , 0)是 F_{q^4} 中元素以 F_{q^2} 表示的第 0 维（低维）。

$F_{q^{12}}$ 中元素有三种表示方法：

(1) $F_{q^{12}}$ 中元素 A 用 F_{q^4} 中元素表示：

$$A = aw^2+bw+c = (a,b,c),$$

a,b,c 用 F_{q^2} 中元素表示：

$$a = a_1v+a_0 = (a_1,a_0);$$
$$b = b_1v+b_0 = (b_1,b_0);$$
$$c = c_1v+c_0 = (c_1,c_0);$$

其中 $a_1,a_0,b_1,b_0,c_1,c_0 \in F_{q^2}$。

(2) $F_{q^{12}}$ 中元素 A 用 F_{q^2} 中的元素表示：

$$A = (a_1,a_0,b_1,b_0,c_1,c_0),$$

a_1,a_0,b_1,b_0,c_1,c_0用基域F_q中的元素表示：

$$a_0=a_{0,1}u+a_{0,0}=(a_{0,1},a_{0,0});$$
$$a_1=a_{1,1}u+a_{1,0}=(a_{1,1},a_{1,0});$$
$$b_0=b_{0,1}u+b_{0,0}=(b_{0,1},b_{0,0});$$
$$b_1=b_{1,1}u+b_{1,0}=(b_{1,1},b_{1,0});$$
$$c_0=c_{0,1}u+c_{0,0}=(c_{0,1},c_{0,0});$$
$$c_1=c_{1,1}u+c_{1,0}=(c_{1,1},c_{1,0});$$

其中$a_{0,1},a_{0,0},a_{1,1},a_{1,0},b_{0,1},b_{0,0},b_{1,1},b_{1,0},c_{0,1},c_{0,0},c_{1,1},c_{1,0} \in F_q$。

(3) $F_{q^{12}}$ 中元素 A 用基域 F_q 中的元素表示：

$$A=(a_{0,1},a_{0,0},a_{1,1},a_{1,0},b_{0,1},b_{0,0},b_{1,1},b_{1,0},c_{0,1},c_{0,0},c_{1,1},c_{1,0}),$$

其中$a_{0,1},a_{0,0},a_{1,1},a_{1,0},b_{0,1},b_{0,0},b_{1,1},b_{1,0},c_{0,1},c_{0,0},c_{1,1},c_{1,0} \in F_q$。

F_{q^2}中单位元的表示为(0, 1)；

F_{q^4}中单位元的表示为(0, 0, 0, 1)；

$F_{q^{12}}$中单位元的表示为(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)。

各种扩域中分量序为：左边是高维，右边是低维。

示例数据中，扩域中的元素均用基域中的元素表示。

附　录　B
（资料性附录）
关于椭圆曲线的背景知识

B.1　有限域

B.1.1　素域F_p

设 p 是一个素数，整数模 p 的全体余数的集合$\{0,1,2,...,p-1\}$关于模 p 的加法和乘法构成一个 p 阶素域，用符号 F_p 表示。加法单位元是 0，乘法单位元是 1，F_p 的元素满足如下运算法则：

——**加法**：设 $a, b\in F_p$，则 $a + b = r$，其中 $r=(a + b) \bmod p$, $r\in[0, p-1]$。

——**乘法**：设 $a, b\in F_p$，则 $a \cdot b = s$, 其中 $s = (a \cdot b) \bmod p$, $s\in[0, p-1]$。

记F_p^*是由F_p中所有非零元构成的乘法群，由于F_p^*是循环群，所以在F_p中至少存在一个元素g，使得F_p中任一非零元都可以由g的一个方幂表示，称g为F_p^*的生成元(或本原元)，即$F_p^*=\{g^i|\ 0\le i\le\ p-2\}$。设$a=g^i\in F_p^*$，其中$0\le i\le p-2$，则$a$的乘法逆元为：$a^{-1}= g^{p-1-i}$

示例1：素域 F_{19}，$F_{19}=\{0, 1, 2, \ldots, 18\}$。

F_{19} 中加法的示例：$10, 14\in F_{19}$，$10+14=24$，$24 \bmod 19 =5$，则 $10+14=5$。

F_{19} 中乘法的示例：$7, 8\in F_{19}$，$7\times8=56$，$56 \bmod 19 =18$，则 $7 \cdot 8=18$。

13 是 F_{19}^* 的一个生成元，则 F_{19}^* 中元素可由 13 的方幂表示出来：

$13^0 = 1$，$13^1 = 13$，$13^2 = 17$，$13^3 = 12$，$13^4 = 4$，$13^5 = 14$，$13^6 = 11$，$13^7 = 10$，$13^8 = 16$，$13^9 = 18$，

$13^{10} = 6$，$13^{11} = 2$，$13^{12} = 7$，$13^{13} = 15$，$13^{14} = 5$，$13^{15} = 8$，$13^{16} = 9$，$13^{17} = 3$，$13^{18} = 1$。

B.1.2　有限域F_{q^m}

设 q 是一个素数或素数方幂，$f(x)$是多项式环 $F_q[x]$上的一个 m $(m>1)$次不可约多项式(称为约化多项式或域多项式)，商环 $F_q[x]/(f(x))$是含 q^m 个元素的有限域(记为 F_{q^m})，称 F_{q^m} 是有限域 F_q 的扩域，域 F_q 为域 F_{q^m} 的子域，m 为扩张次数。F_{q^m} 可以看成 F_q 上的 m 维向量空间，也就是说，在 F_{q^m} 中存在 m 个元素 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$，使得$\forall a\in F_{q^m}$，$a$ 可以唯一表示为：$a = a_{m-1}\alpha_{m-1} + \cdots + a_1\alpha_1 + a_0\alpha_0$，其中 $a_i\in F_q$，称$\{\alpha_{m-1}, \ldots,\alpha_1, \alpha_0\}$为 F_{q^m} 在 F_q 上的一组基。给定这样一组基，就可以由向量$(a_{m-1},a_{m-2},\ldots,a_1,a_0)$来表示域元素 a。

F_{q^m}在F_q上的基有多种选择：多项式基和正规基等。

不可约多项式$f(x)$可取为首一的多项式$f(x)=x^m+f_{m-1}x^{m-1}+ \cdots + f_2x^2+ f_1x+ f_0$ (其中$f_i\in F_q$, $i=0,1,\ldots,m-1$)，F_{q^m}中的元素由多项式环$F_q[x]$中所有次数低于m的多项式构成，即$F_{q^m}= \{a_{m-1}x^{m-1}+ a_{m-2}x^{m-2}+ \cdots + a_1x+ a_0 \mid a_i\in F_q, i = 0,1, \ldots,m-1\}$。多项式集合$\{x^{m-1},x^{m-2},\ldots, x,1\}$是$F_{q^m}$作为向量空间在$F_q$上的一组基，称为多项式基。当$m$含有因子$d(1<d<m)$时，$F_{q^m}$可以由$F_{q^d}$扩张生成，从$F_{q^d}[x]$中选取一个合适的$m/d$次不可约多项式作为$F_{q^m}$在$F_{q^d}$上的约化多项式，$F_{q^m}$可以由塔式扩张方法(towering method)得到，这种扩张的基本形式仍是由F_q中元素组成的向量。例如当$m=6$时，可以先由F_q经过3次扩张得扩域F_{q^3}，再由F_{q^3}经过2次扩张得到扩域F_{q^6}；也可以先由F_q经过2次扩张得扩域F_{q^2}，再由F_{q^2}经过3次扩张得到扩域F_{q^6} 。

F_{q^m}在F_q上形如$\{\beta,\beta^q,\beta^{q^2},\ldots, \beta^{q^{m-1}}\}$的一组基称为正规基，其中$\beta\in F_{q^m}$ 。$\forall a\in F_{q^m}$，a可以唯一表示为：$a=a_0\beta+a_1\beta^q+\cdots+a_{m-1}\beta^{q^{m-1}}$，其中$a_i\in F_q$，$i=0,1,\ldots,m-1$。对于任意有限域$F_q$及其扩域$F_{q^m}$，这样的基总是存在的。

如果不作特别说明，F_{q^m} 中元素均采用多项式基表示。

域元素 $a_{m-1}x^{m-1}+a_{m-2}x^{m-2}+\cdots+a_1x+a_0$ 相对于多项式基可以由向量$(a_{m-1},a_{m-2},\ldots,a_1,a_0)$表示，所以 $F_{q^m}=\{(a_{m-1},a_{m-2},\ldots,a_1,a_0)|a_i\in F_q, i=0,1,\ldots,m-1\}$。

乘法单位元 1 由(0,…,0,1)表示，零元由(0,…,0,0)表示。域元素的加法和乘法定义如下：

——加法运算

$\forall(a_{m-1},a_{m-2},\ldots,a_1,a_0)$，$(b_{m-1},b_{m-2},\ldots,b_1,b_0)\in F_{q^m}$，则$(a_{m-1},a_{m-2},\ldots,a_1,a_0)+(b_{m-1},b_{m-2},\ldots,b_1,b_0)=(c_{m-1},c_{m-2},\ldots,c_1,c_0)$， 其中 $c_i=a_i+b_i\in F_q$，$i=0,1,\ldots,m-1$，亦即，加法运算按分量执行域 F_q 的加法运算。

——乘法运算

$\forall(a_{m-1},a_{m-2},\ldots,a_1,a_0)$，$(b_{m-1},b_{m-2},\ldots,b_1,b_0)\in F_{q^m}$，则$(a_{m-1},a_{m-2},\ldots,a_1,a_0)\cdot(b_{m-1},b_{m-2},\ldots,b_1,b_0)=(r_{m-1},r_{m-2},\ldots,r_1,r_0)$，其中多项式$(r_{m-1}x^{m-1}+r_{m-2}x^{m-2}+\cdots+r_1x+r_0)$是$(a_{m-1}x^{m-1}+a_{m-2}x^{m-2}+\cdots+a_1x+a_0)\cdot(b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_1x+b_0)$在 $F_q[x]$中模 $f(x)$的余式。

F_{q^m}恰包含q^m个元素。记$F_{q^m}^*$是由F_{q^m}中所有非零元构成的乘法群，$F_{q^m}^*$是循环群，在F_{q^m}中至少存在一个元素g，使得F_{q^m}中任一非零元都可以由g的一个方幂表示，称g为$F_{q^m}^*$ 的生成元(或本原元)，即：$F_{q^m}^*=\{g^i|0\le i\le q^m-2\}$。 设$a=g^i\in F_{q^m}^*$，其中$0\le i\le q^m-2$，则$a$的乘法逆元为：$a^{-1}=g^{q^m-1-i}$。

示例2：F_{3^2}的多项式基表示

取 F_3 上的一个不可约多项式 $f(x)=x^2+1$，则 F_{3^2}中的元素是：

(0, 0)，(0, 1)，(0, 2)，(1, 0)，(1, 1)，(1, 2)，(2, 0)，(2, 1)，(2, 2)

加法：(2, 1)+(2, 0)=(1, 1)

乘法：(2, 1)·(2, 0)=(2, 2)

$$(2x+1)\cdot 2x=4x^2+2x$$
$$=x^2+2x$$
$$\equiv 2x+2 \pmod{f(x)}$$

即 $2x+2$ 是$(2x+1)\cdot 2x$ 除以$f(x)$的余式。

乘法单位元是(0, 1)，$\alpha=x+1$ 是 $F_{3^2}^*$的一个生成元，则 α 的方幂为：

$\alpha^0=(0,1)$， $\alpha^1=(1,1)$， $\alpha^2=(2,0)$， $\alpha^3=(2,1)$， $\alpha^4=(0,2)$， $\alpha^5=(2,2)$，

$\alpha^6=(1,0)$， $\alpha^7=(1,2)$， $\alpha^8=(0,1)$。

B.1.3 有限域上的椭圆曲线

B.1.3.1 概述

有限域上椭圆曲线常用的表示形式有两种：仿射坐标表示和射影坐标表示。

B.1.3.2 仿射坐标表示

设 p 是大于 3 的素数，F_{p^m}上椭圆曲线方程在仿射坐标系下可以简化为 $y^2=x^3+ax+b$，其中 $a,b\in F_{p^m}$，且使得 $4a^3+27b^2\neq 0$。椭圆曲线上的点集记为 $E(F_{p^m})=\{(x,y)|\ x,y\in F_{p^m}$，且满足曲线方程 $y^2=x^3+ax+b\}\cup\{O\}$，其中 O 是椭圆曲线的无穷远点，又称为零点。

$E(F_{p^m})$ $(m\ge 1)$上的点按照下面的加法运算规则，构成一个交换群：

a) $O+O=O$;

b) $\forall P=(x,y)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P+O=O+P=P$;

c) $\forall P=(x,y)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P$ 的逆元素$-P=(x,-y)$，$P+(-P)=O$;

d) 点 $P_1=(x_1,y_1)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P_2=(x_2,y_2)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P_3=(x_3,y_3)=P_1+P_2\neq O$，则

$$\begin{cases} x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2, \\ y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1, \end{cases}$$

其中

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, & 若 x_1 \neq x_2, \\ \dfrac{3{x_1}^2 + a}{2y_1}, & 若 x_1 = x_2 且 P_2 \neq -P_1。 \end{cases}$$

示例3：有限域 F_{19} 上一条椭圆曲线

F_{19} 上方程：$y^2=x^3+x+1$，其中 $a=1$，$b=1$。则 F_{19} 上曲线的点为：

(0 , 1)，(0, 18)，(2, 7)，(2, 12)，(5, 6)，(5, 13)，(7, 3)，(7, 16)，(9, 6)，(9, 13)，(10, 2)，(10, 17)，(13, 8)，(13, 11)，(14, 2)，(14, 17)，(15, 3)，(15, 16)，(16, 3)，(16, 16)

则 $E(F_{19})$有 21 个点(包括无穷远点 O)。

a) 取 $P_1=(10,2)$，$P_2=(9,6)$，计算 $P_3=P_1+P_2$：

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{9-10} = \frac{4}{-1} = -4 \equiv 15 \pmod{19},$$

$x_3=15^2-10-9=225-10-9\equiv16-10-9=-3\equiv16 \pmod{19}$，

$y_3=15\times(10-16)-2=15\times(-6)-2\equiv3 \pmod{19}$，

所以 $P_3=(16,3)$。

b) 取 $P_1=(10,2)$，计算$[2]P_1$：

$$\lambda = \frac{3{x_1}^2 + a}{2y_1} = \frac{3\times10^2+1}{2\times2} = \frac{3\times5+1}{4} = \frac{16}{4} = 4 \pmod{19},$$

$x_3=4^2-10-10=-4\equiv15 \pmod{19}$，

$y_3=4\times(10-15)-2=-22\equiv16 \pmod{19}$，

所以$[2]P_1=(15,16)$。

B.1.3.3 射影坐标表示

设 p 是大于 3 的素数，F_{p^m} 上椭圆曲线方程在标准射影坐标系下可以简化为 $y^2z=x^3+axz^2+bz^3$，其中 $a,b\in F_{p^m}$，且 $4a^3+27b^2\neq0$。椭圆曲线上的点集记为 $E(F_{p^m})=\{(x,y,z)|x,y,z\in F_{p^m}$ 且满足曲线方程 $y^2z=x^3+axz^2+bz^3\}$。对于(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2)，若存在某个 $u\in F_{p^m}$ 且 $u\neq0$，使得：$x_1=ux_2$，$y_1=uy_2$，$z_1=uz_2$，则称这两个三元组等价，表示同一个点。

若 $z\neq0$，记 $X=x/z$，$Y=y/z$，则可从标准射影坐标表示转化为仿射坐标表示：$Y^2=X^3+aX+b$；

若 $z=0$，(0,1,0)对应的仿射坐标系下的点即无穷远点 O。

标准射影坐标系下，$E(F_{p^m})$上点的加法运算定义如下：

a) $O+O=O$；

b) $\forall P=(x,y,z)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P+O=O+P=P$；

c) $\forall P=(x,y,z)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P$ 的逆元素$-P=(ux,-uy,uz)$，$u\in F_{p^m}$ 且 $u\neq0$，$P+(-P)=O$；

d) 设点 $P_1=(x_1,y_1,z_1)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P_2=(x_2,y_2,z_2)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P_3=P_1+P_2=(x_3,y_3,z_3)\neq O$，

若 $P_1\neq P_2$，则：

$$\lambda_1=x_1z_2,\quad \lambda_2=x_2z_1,\quad \lambda_3=\lambda_1-\lambda_2,\quad \lambda_4=y_1z_2,\quad \lambda_5=y_2z_1,\quad \lambda_6=\lambda_4-\lambda_5,\quad \lambda_7=\lambda_1+\lambda_2,\quad \lambda_8=z_1z_2,$$

$$\lambda_9=\lambda_3^2,\quad \lambda_{10}=\lambda_3\lambda_9,\quad \lambda_{11}=\lambda_8\lambda_6^2-\lambda_7\lambda_9,\quad x_3=\lambda_3\lambda_{11},\quad y_3=\lambda_6(\lambda_9\lambda_1-\lambda_{11})-\lambda_4\lambda_{10},\quad z_3=\lambda_{10}\lambda_8;$$

若 $P_1=P_2$，则：

$$\lambda_1=3{x_1}^2+a{z_1}^2,\quad \lambda_2=2y_1z_1,\quad \lambda_3={y_1}^2,\quad \lambda_4=\lambda_3x_1z_1,\quad \lambda_5=\lambda_2^2,\quad \lambda_6=\lambda_1^2-8\lambda_4,$$

$x_3=\lambda_2\lambda_6$， $y_3=\lambda_1(4\lambda_4-\lambda_6)-2\lambda_5\lambda_3$， $z_3=\lambda_2\lambda_5$。

B.1.3.4 Jacobian加重射影坐标系

设 p 是大于 3 的素数，F_{p^m} 上椭圆曲线方程在 Jacobian 加重射影坐标系下可以简化为 $y^2=x^3+axz^4+bz^6$。其中 $a,b\in F_{p^m}$，且 $4a^3+27b^2\neq 0$。椭圆曲线上的点集记为 $E(F_{p^m})=\{(x, y, z)|x,y,z\in F_{p^m}$ 且满足曲线方程 $y^2=x^3+axz^4+bz^6\}$。对于(x_1, y_1, z_1)和(x_2, y_2, z_2)，若存在某个 $u\in F_{p^m}$ 且 $u\neq 0$，使得：$x_1=u^2x_2$，$y_1=u^3y_2$，$z_1=uz_2$，则称这两个三元组等价，表示同一个点。

若 $z\neq 0$,记 $X=x/z^2$,$Y=y/z^3$,则可从 Jacobian 加重射影坐标表示转化为仿射坐标表示：$Y^2=X^3+aX+b$；

若 $z=0$，(1,1,0)对应的仿射坐标系下的点即无穷远点 O。

Jacobian 加重射影坐标系下，$E(F_{p^m})$上点的加法运算定义如下：

a) $O+O=O$；

b) $\forall P=(x, y, z)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P+O=O+P=P$；

c) $\forall P=(x, y, z)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P$ 的逆元素$-P=(u^2x, -u^3y, uz)$，$u\in F_{p^m}$ 且 $u\neq 0$，$P+(-P)=O$；

d) 设点 $P_1=(x_1, y_1, z_1)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P_2=(x_2, y_2, z_2)\in E(F_{p^m})\backslash\{O\}$，$P_3=P_1+P_2=(x_3, y_3, z_3)\neq O$，

若 $P_1\neq P_2$，则：

$$\lambda_1=x_1z_2^2,\quad \lambda_2=x_2z_1^2,\quad \lambda_3=\lambda_1-\lambda_2,\quad \lambda_4=y_1z_2^3,\quad \lambda_5=y_2z_1^3,\quad \lambda_6=\lambda_4-\lambda_5,\quad \lambda_7=\lambda_1+\lambda_2,$$

$$\lambda_8=\lambda_4+\lambda_5,\ \lambda_9=\lambda_7\lambda_3^2,\ x_3=\lambda_6^2-\lambda_9,\ \lambda_{10}=\lambda_9^2-2x_3,\quad y_3=(\lambda_{10}\lambda_6-\lambda_8\lambda_3^3)/2,\ z_3=z_1z_2\lambda_3;$$

若 $P_1=P_2$，则：

$$\lambda_1=3x_1^2+az_1^4,\ \lambda_2=4x_1y_1^2,\ \lambda_3=8y_1^4,\ x_3=\lambda_1^2-2\lambda_2,\ y_3=\lambda_1(\lambda_2-x_3)-\lambda_3,\ z_3=2y_1z_1。$$

B.1.4 有限域上椭圆曲线的阶

有限域 F_{q^m} 上一条椭圆曲线的阶是指点集 $E(F_{q^m})$中元素的个数，记为$\#E(F_{q^m})$。由 Hasse 定理知：$q^m+1-2q^{m/2}\leq\#E(F_{qm})\leq q^m+1+2q^{m/2}$，即$\#E(F_{q^m})=q^m+1-t$，其中 t 称为 Frobenius 迹且$|t|\leq 2q^{m/2}$。

若 F_{q^m} 的特征整除 Frobenius 迹 t，则称此曲线为超奇异的，否则为非超奇异的。

设$E(F_{q^m})$是F_{q^m}上的椭圆曲线，r是与q^m互素的整数，则$E(F_{q^m})$的r阶扭子群$E(F_{q^m})[r]=\{P\in E(F_{q^m})\mid[r]P=O\}$，$E(F_{q^m})[r]$中的点称为$r$-扭点。

B.2 椭圆曲线多倍点运算

椭圆曲线上同一个点的重复相加称为该点的多倍点运算。设 u 是一个正整数，P 是椭圆曲线上的点，其 u 倍点 $Q=[u]P=\underbrace{P+P+\quad+P}_{u个}$。

多倍点运算可以扩展到 0 倍点运算和负数倍点运算：$[0]P=O$，$[-u]P=[u](-P)$。

椭圆曲线多倍点运算的实现有多种方法，这里只介绍最基本的三种方法，以下都假设$1\leqslant u<N$。

算法一：二进制展开法

输入：点P，l 比特的整数$u=\sum_{j=0}^{l-1}u_j2^j$，$u_j\in\{0,1\}$。

输出：$Q=[u]P$。

a) 置$Q=O$；

b) 对j 从$l-1$降至0执行：

b.1) $Q=[2]Q$；

b.2) 若$u_j=1$ 则$Q=Q+P$；

c) 输出Q。

算法二：加减法

输入：点P，l 比特的整数$u=\sum_{j=0}^{l-1}u_j 2^j$，$u_j\in\{0,1\}$。

输出：$Q=[u]P$。

a) 设$3u$的二进制表示是$h_r h_{r-1}\cdots h_1 h_0$，其中最高位$h_r$为1，显然 $r=l$ 或 $l+1$；

b) 设u的二进制表示是$u_r u_{r-1}\cdots u_1 u_0$；

c) 置$Q=P$；

d) 对i从$r-1$降至1执行：

d.1) $Q=[2]Q$；

d.2) 若$h_i=1$，且$u_i=0$，则 $Q=Q+P$；

d.3) 若$h_i=0$，且$u_i=1$，则 $Q=Q-P$；

e) 输出Q。

注：减去点(x, y)，只要加上$(x, -y)$。有多种不同的变种可以加速这一运算。

算法三：滑动窗法

输入：点P，l 比特的整数$u=\sum_{j=0}^{l-1}u_j 2^j$，$u_j\in\{0,1\}$。

输出：$Q=[u]P$。

设窗口长度 $r>1$。

预计算

a) $P_1=P$，$P_2=[2]P$；

b) i从 1 到 $2^{r-1}-1$ 计算 $P_{2i+1}=P_{2i-1}+P_2$；

c) 置 $j=l-1$，$Q=O$。

主循环

d) 当 $j\geq 0$ 执行：

d.1) 若$u_j=0$，则$Q=[2]Q$，$j=j-1$；

d.2) 否则

d.2.1) 令 t 是使$j-t+1\leq r$且$u_t=1$的最小整数；

d.2.2) $h_j=\sum_{i=0}^{j-t}u_{t+i}2^i$；

d.2.3) $Q=[2^{j-t+1}]Q+P_{h_j}$；

d.2.4) 置 $j=t-1$；

e) 输出Q。

B.3 离散对数问题

B.3.1 求解有限域上离散对数问题的方法

有限域 F_q 的全体非零元素构成一个乘法循环群，记为 F_q^*。F_q^*中存在一个元素 g，g 称为生成元，使得 $F_q^*=\{g^i \mid 0\le i\le q-2\}$。$a\in F_q$ 的阶是满足 $a^t=1$ 的最小正整数 t。循环群 F_q^*的阶为 $q-1$，因此 $t \mid q-1$。

设乘法循环群 F_q^*的生成元为 g，$y\in F_q^*$，有限域上离散对数问题是指确定整数 $x\in[0, q-2]$，使得 $y=g^x \bmod q$ 成立。

有限域上离散对数问题现有攻击方法有：

a) Pohlig-Hellman方法：设l是$q-1$的最大素因子，则时间复杂度为$O(l^{1/2})$；

b) BSGS方法：时间复杂度与空间复杂度均为$(\pi q/2)^{1/2}$；

c) Pollard方法：时间复杂度为$(\pi q/2)^{1/2}$；

d) 并行Pollard方法：设s为并行处理器个数，时间复杂度为$(\pi q/2)^{1/2}/s$；

e) 线性筛法(对素域F_q)：时间复杂度为$\exp((1+o(1))(\log q)^{1/2}(\log\log q)^{1/2})$；

f) Gauss整数法(对素域F_q)：时间复杂度为$\exp((1+o(1))(\log q)^{1/2}(\log\log q)^{1/2})$；

g) 剩余列举筛法(对素域F_q)：时间复杂度为$\exp((1+o(1))(\log q)^{1/2}(\log\log q)^{1/2})$；

h) 数域筛法(对素域F_q)：时间复杂度为$\exp(((64/9)^{1/3}+o(1))(\log q(\log\log q)^2)^{1/3})$；

i) 函数域筛法（对小特征域）：时间复杂度为$\exp(c(\log q(\log\log q)^2)^{1/4+o(1)})$和拟多项式时间。

从以上列举的求解离散对数问题的方法及其时间复杂度可知：对于一般的大特征域上的离散对数问题，存在亚指数级计算复杂度的攻击方法，对小特征域上的离散对数问题，目前已经有拟多项式时间的攻击方法。

B.3.2 求解椭圆曲线离散对数问题的方法

已知椭圆曲线$E(F_q)$，阶为n的点$P\in E(F_q)$及$Q\in\langle P\rangle$，椭圆曲线离散对数问题是指确定整数$u\in[0, n-1]$，使得$Q=[u]P$成立。

*ECDLP*现有攻击方法有：

a) Pohlig-Hellman方法：设l是n的最大素因子，则时间复杂度为$O(l^{1/2})$；

b) BSGS方法：时间复杂度与空间复杂度均为$(\pi n/2)^{1/2}$；

c) Pollard方法：时间复杂度为$(\pi n/2)^{1/2}$；

d) 并行Pollard方法：设r为并行处理器个数，时间复杂度为$(\pi n/2)^{1/2}/r$；

e) MOV-方法： 把超奇异椭圆曲线及具有相似性质的曲线的*ECDLP*降到F_q的小扩域上的离散对数问题(亚指数级计算复杂度算法)；

f) Anomalous方法： 对Anomalous曲线($\#E(F_q)=q$的曲线)的有效攻击方法(多项式级计算复杂度算法)；

g) GHS-方法：利用Weil下降技术求解扩张次数为合数的二元扩域上椭圆曲线离散对数问题，将*ECDLP*转化为超椭圆曲线离散对数问题，而求解高亏格的超椭圆曲线离散对数存在亚指数级计算复杂度算法。

h) DGS-点分解方法：对低次扩域上的椭圆曲线离散对数利用的指标计算方法，在某些特殊情况

下，其求解复杂度低于平方根时间复杂度。

从上述对椭圆曲线离散对数问题解法的描述与分析可知：对于一般曲线的离散对数问题，目前的求解方法都为指数级计算复杂度，未发现亚指数级计算复杂度的一般攻击方法；而对于某些特殊曲线的离散对数问题，存在多项式级或者亚指数级计算复杂度算法。

B.4 点的压缩

B.4.1 概述

对于椭圆曲线$E(F_q)$上的任意非无穷远点$P=(x_P, y_P)$，该点能由坐标x_P及由x_P和y_P导出的一个特定比特简洁地表示，称为点的压缩表示。

B.4.2 F_p上椭圆曲线点的压缩与解压缩方法

设$P=(x_P, y_P)$是定义在F_p上椭圆曲线E：$y^2=x^3+ax+b$上的一个点，$\tilde{y}_P$为y_P的最右边的一个比特，则点P可由x_P和比特$\tilde{y}_P$表示。

由x_P和$\tilde{y}_P$恢复y_P的方法如下：

a) 在F_p上计算域元素$\alpha=x_P^3+ax_P+b$；

b) 计算α在F_p上的平方根β(参见附录D.1.4)，若输出是“不存在平方根”，则报错；

c) 若β的最右边比特等于$\tilde{y}_P$，则置$y_P=\beta$；否则置$y_P=p-\beta$。

B.4.3 F_{q^m} (q为奇素数，$m\geq 2$)上椭圆曲线点的压缩与解压缩方法

设$P=(x_P, y_P)$是定义在F_{q^m}上椭圆曲线E：$y^2=x^3+ax+b$上的一个点，则y_P可表示为$(y_{m-1}, y_{m-2}, \ldots, y_1, y_0)$，$\tilde{y}_P$为$y_0$的最右边的一个比特，则点$P$可由$x_P$和比特$\tilde{y}_P$表示。

由x_P和$\tilde{y}_P$恢复y_P的方法如下：

a) 在F_{q^m}上计算域元素$\alpha=x_P^3+ax_P+b$；

b) 计算α在F_{q^m}上的平方根β(参见附录D.1.4)，若输出是“不存在平方根”，则报错；

若β的表示$(\beta_{m-1}, \beta_{m-2}, \ldots, \beta_1, \beta_0)$中$\beta_0$的最右边比特等于$\tilde{y}_P$，则置$y_P=\beta$；否则置$y_P=(\beta'_{m-1}, \beta'_{m-2}, \ldots, \beta'_1, \beta'_0)$，其中$\beta'_i=(q-\beta_i)\in F_q$，$i=0,1,\ldots,m-1$。

附　录　C
（资料性附录）
椭圆曲线上双线性对的计算

C.1　概述

设有限域 F_q 上椭圆曲线为 $E(F_q)$，若$\#E(F_q)=cf\times r$，r 是素数且 $\gcd(r, q)=1$，cf 为余因子，则使 $r|q^k-1$ 的最小正整数 k 称为椭圆曲线相对于 r 的嵌入次数。若 $\mathbb{G}$ 是 $E(F_q)$的 r 阶子群，则 $\mathbb{G}$ 的嵌入次数也是 k。

设 $\bar{F}_q$ 是有限域F_q的代数闭包，$E[r]$表示 $E(\bar{F}_q)$ 中所有r阶点的集合。

C.2　Miller算法

设F_{q^k}上椭圆曲线$E(F_{q^k})$的方程为$y^2=x^3+ax+b$，定义过$E(F_{q^k})$上点U和V的直线为$g_{U,V}$：$E(F_{q^k})\to F_{q^k}$，若过U, V两点的直线方程为$\lambda x+\delta y+\tau=0$，则令函数$g_{U,V}(Q)=\lambda x_Q+\delta y_Q+\tau$，其中$Q=(x_Q, y_Q)$。当$U=V$时，$g_{U,V}$定义为过点$U$的切线；若$U$和$V$中有一个点为无穷远点$O$，$g_{U,V}$就是过另一个点且垂直于$x$轴的直线。一般用$g_U$作为$g_{U,-U}$的简写。

记 $U=(x_U, y_U)$，$V=(x_V, y_V)$，$Q=(x_Q, y_Q)$，$\lambda_1=(3x_V^2+a)/(2y_V)$，$\lambda_2=(y_U-y_V)/(x_U-x_V)$，则有以下性质：

a)　$g_{U,V}(O)=g_{U,O}(Q)=g_{O,V}(Q)=1$；

b)　$g_{V,V}(Q)=\lambda_1(x_Q-x_V)-y_Q+y_V$，$Q\neq O$；

c)　$g_{U,V}(Q)=\lambda_2(x_Q-x_V)-y_Q+y_V$，$Q\neq O$，$U\neq\pm V$；

d)　$g_{V,-V}(Q)=x_Q-x_V$，$Q\neq O$。

Miller 算法是计算双线性对的有效算法。

Miller 算法

输入：曲线 E，E 上两点 P 和 Q，整数 c。

输出：$f_{P,c}(Q)$。

a)　设 c 的二进制表示是 $c_j\ldots c_1c_0$，其最高位 c_j 为 1；

b)　置 $f=1$, $V=P$；

c)　对 i 从 $j-1$ 降至 0，执行：

　　c.1) 计算 $f=f^2\cdot g_{V,V}(Q)/g_{2V}(Q)$, $V=[2]V$；

　　c.2) 若 $c_i=1$，令 $f=f\cdot g_{V,P}(Q)/g_{V+P}(Q)$, $V=V+P$。

d)　输出 f。

一般，称$f_{P,c}(Q)$为Miller函数。

C.3　Weil对的计算

设 E 是 F_q 上的椭圆曲线，r 是与 q 互素的正整数，设 μ_r 是 r 次单位根集合，k 是相对于 r 的嵌入次数，即 $r\mid q^k-1$，则$\mu_r\subset F_{q^k}$。

令 $\mathbb{G}_1=E[r]$，$\mathbb{G}_2=E[r]$，$\mathbb{G}_T=\mu_r$，则 Weil 对是从 $\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_2$ 到 $\mathbb{G}_T$的双线性映射，记为 e_r。

设 $P\in\mathbb{G}_1$，$Q\in\mathbb{G}_2$，若 $P=O$ 或 $Q=O$，则 $e_r(P,Q)=1$；如果 $P\neq O$ 且 $Q\neq O$，随机选取非无穷远点 $T\in\mathbb{G}_1$, $U\in\mathbb{G}_2$，使得 $P+T$ 和 T 均不等于 U 或 $U+Q$，则 Weil 对为：

$$e_r(P,Q)=\frac{f_{P+T,r}(Q+U)f_{T,r}(U)f_{U,r}(P+T)f_{Q+U,r}(T)}{f_{T,r}(Q+U)f_{P+T,r}(U)f_{Q+U,r}(P+T)f_{U,r}(T)}。$$

$f_{P+T,r}(Q+U)$，$f_{T,r}(Q+U)$，$f_{P+T,r}(U)$，$f_{T,r}(U)$，$f_{Q+U,r}(P+T)$，$f_{Q+U,r}(T)$，$f_{U,r}(P+T)$和$f_{U,r}(T)$均可用Miller算法计算。在计算过程中，若出现分母为0的情况，则更换点T或U重新计算。

C.4 Tate对的计算

设 E 是 F_q 上的椭圆曲线，r 是与 q 互素的正整数，k 是相对于 r 的嵌入次数。设 Q 是 $E(F_{q^k})[r]$上的 r 阶点，由 Q 生成的循环群记为$<Q>$。$(F_{q^k}^*)^r$ 为 $F_{q^k}^*$中每一个元素的 r 次幂构成的集合，$(F_{q^k}^*)^r$ 是 $F_{q^k}^*$的子群，$F_{q^k}^*$关于$(F_{q^k}^*)^r$ 的商群记为 $F_{q^k}^*/(F_{q^k}^*)^r$。

令 $\mathbb{G}_1= E(F_q)[r]$，$\mathbb{G}_2= <Q>$，$\mathbb{G}_T= F_{q^k}^*/(F_{q^k}^*)^r$，则 Tate 对是从 $\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_2$ 到 $\mathbb{G}_T$ 的双线性映射，记为 t_r。

设 $P\in\mathbb{G}_1$，$Q\in\mathbb{G}_2$，若 $P=O$ 或 $Q=O$ ，则 $t_r=1$；若 $P\neq O$ 且 $Q\neq O$，随机选择非无穷远点 $U\in E(F_{q^k})$，使得 $P\neq U, P\neq Q+U, U\neq -Q$，则 Tate 对为：

$$t_r(P,Q)=\frac{f_{P,r}(Q+U)}{f_{P,r}(U)}\text{。}$$

$f_{P,r}(Q+U)$和 $f_{P,,r}(U)$可通过 Miller 算法计算。在计算过程中，若出现分母为 0 的情况，则更换点 U 重新计算。

在实际应用中，一般使用约化 Tate 对：

$$t_r(P,Q)=\begin{cases} f_{P,r}(Q)^{(q^k-1)/r}, & Q\neq O, \\ 1, & Q=O\text{。} \end{cases}$$

约化 Tate 对比一般 Tate 对的计算量减少了一半。若相对于 r 的嵌入次数 k 是偶数时，约化 Tate 对的计算方法可以进一步优化。算法 1 描述的是一般约化 Tate 对的计算方法，算法 2、3、4 均指 $k=2d$ 的情况。

算法 1

输入：与 q 互素的整数 r，$P\in E(F_q)[r]$，$Q\in E(F_{q^k})[r]$。

输出：$t_r(P, Q)$。

a) 设 r 的二进制表示是 $r_j\ldots r_1r_0$，其最高位 r_j 为 1；

b) 置 $f=1, V=P$；

c) 对 $i=j-1$ 降至 0，执行：

c.1) 计算 $f=f^2\cdot g_{V,V}(Q)/g_{2V}(Q),\ V=[2]V$；

c.2) 若 $r_i=1$，则计算 $f=f\cdot g_{V,P}(Q)/g_{V+P}(Q),\ V=V+P$；

d) 计算 $f=f^{(q^k-1)/r}$；

e) 输出 f。

算法 2

输入：与 q 互素的整数 r，$P\in E(F_q)[r]$，$Q\in E(F_{q^k})[r]$。

输出：$t_r(P, Q)$。

a) 设 r 的二进制表示是 $r_j\ldots r_1r_0$，其最高位 r_j 为 1；

b) 置 $f=1, V=P$；

c) 对 $i=j-1$ 降至 0，执行：

c.1) 计算 $f=f^2\cdot g_{V,V}(Q)/g_{2V}(Q),\ V=[2]V$；

c.2) 若 $r_i=1$，则计算 $f=f\cdot g_{V,P}(Q)/g_{V+P}(Q),\ V=V+P$；

d) 计算 $f=f^{q^d-1}$ ；

e) 计算 $f=f^{(q^d+1)/r}$ ；

f) 输出 f。

算法 3

如果将 F_{q^k} $(k=2d)$看成 F_{q^d} 的二次扩域，则 F_{q^k} 上元素可表示成 $w=w_0+iw_1$ 的形式，其中 $w_0, w_1\in F_{q^d}$，则 w 的共轭 $\overline{w}=w_0-iw_1$，此时算法 1 中的求逆运算可用共轭代替。

输入：与 q 互素的整数 r，$P\in E(F_q)[r]$，$Q\in E(F_{q^k})[r]$。
输出：$t_r(P, Q)$。
a) 设 r 的二进制表示是 $r_j\ldots r_1r_0$，其最高位 r_j 为 1；
b) 置 $f=1$, $V=P$；
c) 对 i 从 $j-1$ 降至 0，执行：
   c.1) 计算 $f=f^2\cdot g_{V,V}(Q)\cdot \overline{g}_{2V}(Q),\ V=[2]V$；
   c.2) 若 $r_i=1$，令 $f=f\cdot g_{V,P}(Q)\cdot \overline{g}_{V+P}(Q),\ V=V+P$；
d) 计算 $f=f^{q^d-1}$；
e) 计算 $f=f^{(q^d+1)/r}$；
f) 输出 f。

算法 4
当 q 为大于 3 的素数时，点 $Q\in E'$， E'是 E 的扭曲线，此时算法可进一步优化。
输入：$P\in E(F_q)[r]$，$Q\in E'(F_{q^d})[r]$，整数 r。
输出：$t_r(P, Q)$。
a) 设 r 的二进制表示是 $r_j\ldots r_1r_0$，其最高位 r_j 为 1；
b) 置 $f=1$, $V=P$；
c) 对 i 从 $j-1$ 降至 0，执行：
   c.1) 计算 $f=f^2\cdot g_{V,V}(Q),\ V=[2]V$；
   c.2) 若 $r_i=1$，则计算 $f=f\cdot g_{V,P}(Q),\ V=V+P$；
d) 计算 $f=f^{q^d-1}$；
e) 计算 $f=f^{(q^d+1)/r}$；
f) 输出f。

C.5 Ate对的计算

C.5.1 概述

设π_q为 Frobenius 自同态，即π_q：$E\to E$，$(x,y)\quad(x^q,y^q)$； $[q]$为映射：$E\to E$，$Q\quad[q]Q$； $[1]$为单位映射；π_q的对偶为π_q'，满足$\pi_q\cdot\pi_q'=[q]$；Ker( )表示映射的核；设椭圆曲线 $E(F_q)$的 Frobenius 迹为 t,令 $T=t-1$。

下面给出不同结构下的Ate对的计算方法。

C.5.2 定义在$\mathbb{G}_2\times\mathbb{G}_1$上Ate对的计算

设 $\mathbb{G}_1=E[r]\cap\mathrm{Ker}(\pi_q-[1])$，$\mathbb{G}_2=E[r]\cap\mathrm{Ker}(\pi_q-[q])$，$P\in\mathbb{G}_1$，$Q\in\mathbb{G}_2$。定义 $\mathbb{G}_2\times\mathbb{G}_1$ 上 Ate 对：

$$Ate：\mathbb{G}_2\times\mathbb{G}_1\to F_{q^k}^*/(F_{q^k}^*)^r$$

$$(Q,P)\quad f_{Q,T}(P)^{(q^k-1)/r}。$$

下面给出 $\mathbb{G}_2\times\mathbb{G}_1$ 上 Ate 对的计算方法：
输入：$\mathbb{G}_1=E[r]\cap\mathrm{Ker}(\pi_q-[1])$，$\mathbb{G}_2=E[r]\cap\mathrm{Ker}(\pi_q-[q])$，$P\in\mathbb{G}_1$，$Q\in\mathbb{G}_2$，整数 $T=t-1$。
输出：$Ate(Q, P)$。
a) 设 T 的二进制表示是 $t_j\ldots t_1t_0$，其最高位 t_j 为 1；
b) 置 $f=1$, $V=Q$；
c) 对 i 从 $j-1$ 降至 0，执行：
   c.1) 计算 $f=f^2\cdot g_{V,V}(P),\ V=[2]V$；
   c.2) 若 $t_i=1$，计算 $f=f\cdot g_{V,Q}(P)/g_{V+Q}(P),\ V=V+Q$；
d) 计算 $f=f^{(q^k-1)/r}$；

e) 输出f。

C.5.3 定义在$\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_2$上Ate对的计算

对于超奇异椭圆曲线来说，以上Ate对的定义与技术可以直接应用；而对于常曲线来说，需要把$\mathbb{G}_2$转换到扭曲线上才可以定义Ate对。

超奇异椭圆曲线上Ate对

设E为定义在F_q上的超奇异椭圆曲线，$\mathbb{G}_1=E[r]\cap\mathrm{Ker}(\pi_q'-[q])$，$\mathbb{G}_2=E[r]\cap\mathrm{Ker}(\pi_q'-[1])$，$\mathbb{G}_T=F_{q^k}^*/(F_{q^k}^*)^r$，$P\in\mathbb{G}_1$，$Q\in\mathbb{G}_2$。定义$\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_2$上的Ate对：

$$Ate：\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_2\to F_{q^k}^*/(F_{q^k}^*)^r$$
$$(P,Q)\quad f_{P,T}(Q)^{(q^k-1)/r}。$$

下面给出$\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_2$上Ate对的计算方法：

输入：$\mathbb{G}_1=E[r]\cap\mathrm{Ker}(\pi_q'-[q])$，$\mathbb{G}_2=E[r]\cap\mathrm{Ker}(\pi_q'-[1])$，$P\in\mathbb{G}_1$，$Q\in\mathbb{G}_2$，整数$T=t-1$。

输出：$Ate(P,Q)$。

a) 设T的二进制表示是$t_j\ldots t_1t_0$，其最高位t_j为1；

b) 置$f=1$, $V=P$；

c) 对i从$j-1$降至0，执行：

c.1) 计算$f=f^2\cdot g_{V,V}(Q),\ V=[2]V$；

c.2) 若$t_i=1$，计算$f=f\cdot g_{V,P}(Q)/g_{V+P}(Q),\ V=V+P$；

d) 计算$f=f^{(q^k-1)/r}$；

e) 输出f。

常曲线上的Ate对

对于常曲线来说，存在一个整数e，使得$(\pi_q')^e$成为$\mathbb{G}_1$上的自同构，这样可以用扭曲线理论在$Ate(P,Q)$和$f_{P,T^e}(Q)$之间建立起联系，其中$T=t-1$，t为迹。

设E是定义在F_q上的椭圆曲线，E'为E的d次扭曲线。k为嵌入次数，$m=\gcd(k,d)$，$e=k/m$，ζ_m是m次本原单位根，当$p\geq 5$时，d的取值有三种情况：

a) $d=6$，$\beta=\zeta_m^{-6}$，E'：$y^2=x^3+\beta b$，$\phi_6:E'\to E:(x,y)\quad(\beta^{-1/3}x,\beta^{-1/2}y)$，$\mathbb{G}_1=E[r]\cap\mathrm{Ker}(\pi_q-[1])$，$\mathbb{G}_2=E'[r]\cap\mathrm{Ker}([\beta^{-1/6}]\pi_q^e-[1])$；

b) $d=4$，$\beta=\zeta_m^{-4}$，E'：$y^2=x^3+\beta ax$，$\phi_4:E'\to E:(x,y)\quad(\beta^{-1/2}x,\beta^{-3/4}y)$，$\mathbb{G}_1=E[r]\cap\mathrm{Ker}(\pi_q-[1])$，$\mathbb{G}_2=E'[r]\cap\mathrm{Ker}([\beta^{-1/4}]\pi_q^e-[1])$；

c) $d=2$，$\beta=\zeta_m^{-2}$，E'：$y^2=x^3+\beta^2ax+\beta^3b$，$\phi_2:E'\to E:(x,y)\quad(\beta^{-1}x,\beta^{-3/2}y)$，$\mathbb{G}_1=E[r]\cap\mathrm{Ker}(\pi_q-[1])$，$\mathbb{G}_2=E'[r]\cap\mathrm{Ker}([\beta^{-1/2}]\pi_q^e-[1])$。

设$P\in\mathbb{G}_1$，$Q\in\mathbb{G}_2$。定义$\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_2$上Ate对：

$$Ate：\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_2\to F_{q^k}^*/(F_{q^k}^*)^r$$
$$(P,Q)\quad f_{P,T^e}(Q)^{(q^k-1)/r}。$$

下面给出具体算法描述：

输入：$\mathbb{G}_1$，$\mathbb{G}_2$，$P\in\mathbb{G}_1$，$Q\in\mathbb{G}_2$，整数$T=t-1$。

输出：$Ate(P,Q)$。

a) 计算$u=T^e$；

b) 设 u 的二进制表示是 $t_j \ldots t_1 t_0$，其最高位 t_j 为 1；
c) 置 $f=1$, $V=P$；
d) 对 i 从 $j-1$ 降至 0，执行：
   d.1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{V,V}(Q),\ V = [2]V$；
   d.2) 若 $t_i=1$，计算 $f = f \cdot g_{V,P}(Q) / g_{V+P}(Q),\ V = V + P$；
e) 计算 $f = f^{(q^k-1)/r}$；
f) 输出 f。

如果定义在$\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2$上的Ate对所基于的椭圆曲线是超奇异的，则容易看出它比Tate对有更高的效率。但对于常曲线来说，只有当$|T^e| \le r$时它的运算效率才会比Tate对高，所以只有在t值较小时才推荐使用Ate对。

C.6 R-ate 对的计算

C.6.1 R-ate 对的定义

R-ate 对中的“R”可视为两个对的比值，也可以看成是 Tate 对的某固定幂次。

令 $A, B, a, b \in Z$， $A = aB + b$. Miller 函数 $f_{Q,A}(P)$有如下性质：

$$f_{Q,A}(P) = f_{Q,aB+b}(P) = f_{Q,aB}(P) \cdot f_{Q,b}(P) \cdot g_{[aB]Q,[b]Q}(P) / g_{[A]Q}(P)$$

$$= f_{Q,B}^{a}(P) \cdot f_{[B]Q,a}(P) \cdot f_{Q,b}(P) \cdot \frac{g_{[aB]Q,[b]Q}(P)}{g_{[A]Q}(P)}$$

定义 R-ate 对为

$$R_{A,B}(Q,P) = \left(f_{[B]Q,a}(P) \cdot f_{Q,b}(P) \cdot \frac{g_{[aB]Q,[b]Q}(P)}{g_{[A]Q}(P)}\right)^{(q^k-1)/n}$$

$$= \left(\frac{f_{Q,A}(P)}{f_{Q,B}^{a}(P)}\right)^{(q^k-1)/n}$$

如果 $f_{Q,A}(P)$和 $f_{Q,B}(P)$是非退化对的 Miller 函数，则 $R_{A,B}(Q,P)$也是非退化对。

令 $L_1, L_2, M_1, M_2 \in Z$，使得 $e_n^{L_1}(Q,P) = (f_{Q,A}(P))^{M_1 \cdot (q^k-1)/n}$

$$e_n^{L_2}(Q,P) = (f_{Q,B}(P))^{M_2 \cdot (q^k-1)/n}$$

令 $M = lcm(M_1, M_2)$ ，$m = (M/M_1) \cdot L_1 - a \cdot (M/M_2) \cdot L_2$.
为了非退化，n 不能整除 m. 我们有

$$e_n^m(Q,P) = e_n^{\frac{M}{M_1}L_1 - a\frac{M}{M_2}L_2}(Q,P) = \frac{e_n(Q,P)^{L_1\frac{M}{M_1}}}{e_n(Q,P)^{aL_2\frac{M}{M_2}}} = \left(\frac{f_{Q,A}(P)}{f_{Q,B}(P)^a}\right)^{M \cdot (q^k-1)/n}$$

易见 $e_n^m(Q,P) = R_{A,B}(Q,P)^M$.

一般来说，不是任意整数对(A, B)都能给出非退化对，(A, B)有四种选择：

1. $(A; B) = (q^i; n)$
2. $(A; B) = (q; T_1)$

3. $(A; B) = (T_i; T_j)$

4. $(A; B) = (n; T_i)$

其中 $T_i \equiv q^i (\bmod n)$ ，$i \in Z$ ，$0 < i < k$.

情形 1： $(A; B) = (q^i; n)$，由于 $A = aB + b$，即 $q^i = an + b$. 因此 $b \equiv q^i (\bmod n)$，

又 $\left(\frac{f_{Q,q^i}(P)}{f^a_{Q,n}(P)}\right)^{(q^k-1)/n} = R_{A,B}(Q,P) = \left(f_{[n]Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[an]Q,[b]Q}(P)}{g_{[q^i]Q}(P)}\right)^{(q^k-1)/n}$

因为 $b \equiv q^i (\bmod n)$，所以 $g_{[an]Q,[b]Q}(P) = g_{[q^i]Q}(P)$. 更进一步，$f_{[n]Q,a}(P) = 1$. 因此

$$R_{A,B}(Q, P) = f_{Q,q^i}(P)^{(q^k-1)/n} \tag{1}$$

情形 2： $(A; B) = (q; T_1)$ ，即 $q = aT_1 + b$， 则：

$$\left(\frac{f_{Q,q}(P)}{f^a_{Q,T_1}(P)}\right)^{(q^k-1)/n} = R_{A,B}(Q,P) = \left(f_{[T_1]Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_1]Q,[b]Q}(P)}{g_{[q]Q}(P)}\right)^{(q^k-1)/n}$$

由于 $f_{[T_1]Q,a}(P) = f^q_{Q,a}(P)$，因此

$$R_{A,B}(Q,P) = \left(f^q_{Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_1]Q,[b]Q}(P)}{g_{[q]Q}(P)}\right)^{(q^k-1)/n} \tag{2}$$

情形 3： $(A; B) = (T_i; T_j)$， 即 $T_i = aT_j + b$. 有：

$$\left(\frac{f_{Q,T_i}(P)}{f^a_{Q,T_j}(P)}\right)^{(q^k-1)/n} = R_{A,B}(Q,P) = \left(f_{[T_j]Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_j]Q,[b]Q}(P)}{g_{[q^i]Q}(P)}\right)^{(q^k-1)/n}$$

同样，因为 $f_{[T_j]Q,a}(P) = f^{q_j}_{Q,a}(P)$，因此：

$$R_{A,B}(Q,P) = \left(f^{q_j}_{Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_j]Q,[b]Q}(P)}{g_{[q^i]Q}(P)}\right)^{(q^k-1)/n} \tag{3}$$

情形 4： $(A; B) = (n; T_i)$，即 $n = aT_i + b$. 因此：

$$\left(\frac{f_{Q,n}(P)}{f^a_{Q,T_i}(P)}\right)^{(q^k-1)/n} = R_{A,B}(Q,P) = \left(f_{[T_i]Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_i]Q,[b]Q}(P)}{g_{[n]Q}(P)}\right)^{(q^k-1)/n}$$

同样，由 $f_{[T_i]Q,a}(P) = f^{q_i}_{Q,a}(P)$ 得

$$R_{A,B}(Q,P) = \left(f^{q_i}_{Q,a}(P) f_{Q,b}(P) \frac{g_{[aT_i]Q,[b]Q}(P)}{g_{[n]Q}(P)}\right)^{(q^k-1)/n} \tag{4}$$

情形 1 的 R-ate 对也称 Ate_i 对。情形 2、3、4 的对计算需要两个长度为 $\log a$ 和 $\log b$ 的 Miller 循环。情形 2 和情形 4 只能改变一个参数 i 来获得有效对，情形 3 可以改变两个参数。因此，一般都选择情形 3 的 R-ate 对，这时$(A; B) = (T_i; T_j)$。

为了降低Miller循环次数，可以尝试不同的i和j，使整数a和b足够小，从而使Miller循环次数减至$\log(r^{1/\Phi(k)})$。

C.6.2 BN曲线上R-ate对的计算

Barreto 和 Naehrig 提出了一种构造素域 F_q 上适合对的常曲线的方法，通过此方法构造的曲线称为 BN 曲线。BN 曲线方程为 E：$y^2 = x^3+b$, 其中 $b \neq 0$. 嵌入次数 k=12，曲线阶 r 也是素数。

基域特征 q，曲线阶 r，Frobenius 映射的迹 tr 可通过参数 t 来确定：

$q(t) = 36t^4+ 36t^3+ 24t^2+ 6t + 1$

$r(t) = 36t^4+ 36t^3+ 18t^2+ 6t + 1$

$tr(t) = 6t^2+ 1$

其中 $t\in Z$ 是任意使得 $q = q(t)$ 和 $r = r(t)$ 均为素数的整数，为了达到一定的安全级别，t 必须足够大，至少达到 63 比特。

BN 曲线存在定义在 F_{q^2} 上的 6 次扭曲线 E'： $y^2 = x^3 +\beta b$，其中$\beta\in F_{q^2}$，并且在 F_{q^2} 上既不是二次元也不是三次元，选择β使得 $r|\#E'(F_{q^2})$，$\mathbb{G}_2$ 中点可用扭曲线 E' 上的点来表示，$\phi_6 : E' \to E : (x, y) \mapsto (\beta^{-1/3}x, \beta^{-1/2}y)$。因此对的计算限制在 $E(F_q)$上点 P 和 $E'(F_{q^2})$上点 Q'。

π_q 为 Frobenius 自同态，π_q：$E\to E$，$\pi_q(x, y)=(x^q,y^q)$。

$\pi_{q^2} : E \to E, \quad \pi_{q^2}(x, y) = (x^{q^2}, y^{q^2})$。

R-ate 对的计算：

输入: $P\in E(F_q)[r], Q\in E'(F_{q^2})[r]$，$a = 6t + 2$ 。

输出： $R_a(Q, P)$ 。

a) 设 $a = \sum_{i=0}^{L-1} a_i 2^i$， $a_{L-1} = 1$；

b) 置 T=Q， f=1；

c) 对 i 从 $L-2$ 降至 0，执行：

c.1) 计算 $f = f^2 \cdot g_{T,T}(P)$， T=[2]T;

c.2) 若 $a_i = 1$，计算 $f = f \cdot g_{T,Q}(P)$，$T = T + Q$;

d) 计算 Q_1=$\pi_q(Q)$，Q_2=$\pi_{q^2}(Q)$;

e) 计算 $f = f \cdot g_{T,Q_1}(P)$，$T = T + Q_1$ ；

f) 计算 $f = f \cdot g_{T,-Q_2}(P)$，$T$=$T - Q_2$ ；

g) 计算 $f = f^{(q^{12}-1)/r}$；

h) 输出 f。

关于Weil对、Tate对、Ate对、R-ate对的更多计算方法请参见(Barreto P, Lynn, Scott M. 2003)、(Barreto P, Galbraith S, et al. 2004)、(Eisentrager K, Lauter K, Montgomery P. 2003)、(Galbraith S, Harrison K, Soldera D. 2002)、(Kobayashi T, Aoki K, Imai H. 2006)、(Lauter K, Montgomery P, Naehrig M. 2010)、(Miller V. 2004)、(Scott M. 2005)、(Scott M. 2006)、(Scott M, Barreto P. 2004)。

C.7 适合对的椭圆曲线

对于超奇异曲线，双线性对的构造相对容易，但对于随机生成的曲线，构造可计算的双线性对比较困难，因此采用常曲线时，需要构造适合对的曲线。

假设 E 是定义在 F_q 上的椭圆曲线，如果以下三个条件成立，则称 E 是适合对的曲线：

a) $\#E(F_q)$有一个不小于 $\sqrt{q}$ 的素因子 r ；

b) E 相对于 r 的嵌入次数小于 $\log_2(r)/8$ ；

c) $r\pm1$ 的最大素因子的规模与 r 相当。

构造适合对的椭圆曲线的步骤如下：

步骤 1：选定 k，计算整数 t、r、q，使得存在一条椭圆曲线 $E(F_q)$，其迹为 t，具有一个素数阶 r 的子群且嵌入次数为 k；

步骤 2：利用复乘方法在 F_q 上计算该曲线的方程参数。

构造适合对的椭圆曲线的方法请参见文献(Atkin A, Morain F. 1993)、 (Barreto P, Lynn B, Scott M. 2002)、(Barreto P, Lynn B, Scott M. 2003)、(Barreto P, Naehrig M. 2005)、(Brezing F, Weng A. 2005)、(Duan P, Cui S, Wah Chan C. 2005)、(Dupont R, Enge A, Morain F. 2005)、(Freeman D. 2006)、(Freeman D, Scott M, Tesk E. 2006)、(Lay G, Zimmer H. 1994)、(Milne J. 2006.)、(Miyaji A, Nakabayashi M, Takano S. 2001)、(Scott M. 2006)、(Thuen Ø. 2006)。

附　录　D
（资料性附录）
数论算法

D.1　有限域中的运算

D.1.1　有限域中的指数运算

设a是正整数，g是域F_q上的元素，指数运算是计算g^a的运算过程。通过以下的二进制方法可以有效地执行指数运算。

输入：正整数a，域F_q，域元素g。

输出：g^a。

a)　置$e = a \bmod (q-1)$，若$e = 0$，则输出1；

b)　设e的二进制表示是$e_r e_{r-1} \ldots e_1 e_0$，其最高位$e_r$为1；

c)　置$x = g$；

d)　对 i 从$r-1$降至 0 执行：

d.1)　置$x = x^2$；

d.2)　若$e_i = 1$，则置$x = g \cdot x$；

e)　输出x。

其它加速算法参见文献(Brickell E, Gordon D, Mccurley K, et al. 1993)、(Knuth D. 1981)。

D.1.2　有限域中的逆运算

设g是域F_q上的非零元素，则逆元素g^{-1}是使得$g \cdot c = 1$成立的域元素c。由于$c = g^{q-2}$，因此求逆可通过指数运算实现。若q是素数，g是满足$1 \le g \le q-1$的整数，则g^{-1}是整数c，$1 \le c \le q-1$，且$g \cdot c \equiv 1 \pmod q$。

输入：域F_q，F_q中的非零元素g。

输出：逆元素g^{-1}。

a)　计算$c = g^{q-2}$(参见附录D.1.1)；

b)　输出c。

更为有效的方法是扩展的欧几里德(Euclid)算法，参见(Knuth D. 1981)。

D.1.3　Lucas序列的生成

令X和Y是非零整数，X和Y的Lucas序列U_k , V_k的定义如下：

$U_0 = 0, U_1 = 1,$　当$k \ge 2$时，$U_k = X \cdot U_{k-1} - Y \cdot U_{k-2}$；

$V_0 = 2, V_1 = X,$　当$k \ge 2$时，$V_k = X \cdot V_{k-1} - Y \cdot V_{k-2}$。

上述递归式适于计算k值较小的U_k和V_k 。对大整数k，下面的算法可有效地计算$U_k \bmod q$和$V_k \bmod q$。

输入：奇素数q，整数X和Y，正整数k。

输出：$U_k \bmod q$和$V_k \bmod q$。

a)　置$\Delta = X^2 - 4Y$；

b)　设k的二进制表示是$k = k_r k_{r-1} \ldots k_1 k_0$，其中最高位$k_r$为1；

c)　置$U = 1$，$V = X$；

d)　对i从$r-1$降至0执行：

d.1) 置$(U,V)=((U\cdot V)\bmod q, ((V^2+\Delta\cdot U^2)/2) \bmod q)$；

d.2) 若$k_i=1$，则置$(U,V)=(((X\cdot U+V)/2)\bmod q, ((X\cdot V+\Delta\cdot U)/2)\bmod q)$；

e) 输出U和V。

D.1.4 平方根的求解

F_q上平方根的求解

设q是奇素数，g是满足$0\le g<q$的整数，g的平方根(mod q)是整数y，即$y^2 \bmod q=g$，$0\le y<p$。

若$g=0$，则只有一个平方根，即$y=0$；若$g\neq 0$，则g有零个或两个平方根，若y是其中一个平方根，则另一个平方根就是$q-y$。

下面的算法可以确定g是否有平方根，若有，就计算其中一个根。

输入：奇素数q，整数g，$0<g<q$。

输出：若存在g的平方根，则输出一个平方根，否则输出“不存在平方根”。

算法1：对$q\equiv 3 \pmod 4$，即存在正整数u，使得$q=4u+3$。

a) 计算$y=g^{u+1}\bmod q$(参见附录D.1.1)；

b) 计算$z=y^2 \bmod q$；

c) 若$z=g$，则输出 y；否则输出“不存在平方根”。

算法2：对$q\equiv 5 \pmod 8$，即存在正整数u，使得$q=8u+5$。

a) 计算$z=g^{2u+1} \bmod q$(参见附录D.1.1)；

b) 若$z\equiv 1 \pmod q$，计算$y=g^{u+1} \bmod q$，输出y，终止算法；

c) 若$z\equiv -1 \pmod q$，计算$y=(2g\cdot(4g)^u) \bmod q$，输出$y$，终止算法；

d) 输出“不存在平方根”。

算法3：对$q\equiv 1 \pmod 8$，即存在正整数u，使得$q=8u+1$。

a) 置$Y=g$；

b) 生成随机数X，$0<X<q$；

c) 计算Lucas序列元素(见附录D.1.3)：$U=U_{4u+1}\bmod q$，$V=V_{4u+1}\bmod q$；

d) 若$V^2\equiv 4Y \pmod q$，则输出 $y=(V/2) \bmod q$，并终止；

e) 若$U \bmod q\neq 1$且$U \bmod q\neq q-1$，则输出“不存在平方根”，并终止；

f) 返回步骤b)。

F_{q^2}上平方根的求解

设q是奇素数，对于二次扩域F_{q^2}，假设约化多项式为$f(x)=x^2-n$，$n\in F_q$，则F_{q^2}中元素β可表示成$a+bx$的形式，$a,b\in F_q$，则β的平方根为：

$$\sqrt{\beta}=\sqrt{a+bx}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-nb^2}}{2}}+\frac{xb}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-nb^2}}{2}}}\right) \text{或}$$

$$\pm\left(\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-nb^2}}{2}}+\frac{xb}{2\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-nb^2}}{2}}}\right)$$

下面的算法可以确定β是否有平方根，若有，就计算其中一个根。

输入：F_{q^2}中元素$\beta=a+bx$且$\beta\neq 0$，q为奇素数。

输出：若存在β的平方根，则输出一个平方根z，否则输出“不存在平方根”。

a) 计算$U=a^2-nb^2$；

b) 利用D.1.4.1的方法求U mod q的平方根，若U mod q的平方根存在，记作w_i，即$w_i^2=U \bmod q$，$i=1,2$，转步骤c)；否则输出“不存在平方根”，并终止；

c) 对i从1至2执行：

c.1) 计算$V=(a+w_i)/2$ ；

c.2) 利用D.1.4.1的方法求V mod q的平方根，若V mod q的平方根存在，任取一个根y ，即$y^2=V \bmod q$，转步骤d)；若V mod q的平方根不存在且$i=2$，输出“不存在平方根”，并终止算法；

d) 计算 $z_1 = b/2y \pmod q$，令$z_0=y$；

e) 输出 $z = z_0+z_1x$。

F_{q^m}上平方根的求解

D.1.4.1.1 F_{q^m}上平方元检测

设q是奇素数，且$m\geq 2$，g是域F_{q^m}中非零元素，下面算法给出g是否为一个平方元的检测。

输入：域元素g。

输出：若g是平方元则输出“是平方元”，否则输出“不是平方元”。

a) 计算$B= g^{(q^m-1)/2}$；(参见D.1.1)

b) 若$B=1$，则输出“是平方元”；

c) 若$B=-1$，则输出“不是平方元”。

D.1.4.1.2 F_{q^m}上平方根的求解

设q是奇素数，且$m\geq 2$。

输入：域元素g。

输出：若g是平方元则输出平方根B，否则输出“没有平方根”。

a) 随机选取非平方元Y；

b) 计算$q^m-1=2^u\times k$ ；（其中k为奇数。）

c) 计算$Y= Y^k$；

d) 计算$C= g^k$；

e) 计算$B= g^{(k+1)/2}$；

f) 若$C^{2^{u-1}}\neq 1$，则输出“没有平方根”，终止算法；

g) 当$C\neq 1$执行：

g.1) 设i是使$C^{2^i}=1$成立的最小正整数；

g.2) 计算$C= C\times Y^{2^{u-i}}$；

g.3) 计算$B= B\times Y^{2^{u-i-1}}$；

h) 输出B。

D.1.5 概率素性检测

设u是一个大的正整数，下面的概率算法(Miller-Rabin检测)将确定u是素数还是合数。

输入：一个大的奇数 u 和一个大的正整数T。

输出：“概率素数”或“合数”。

a) 计算 v 和奇数w，使得$u-1=2^v\cdot w$；

b) 对j从1到T 执行：

b.1) 在区间[2，$u-1$]中选取随机数a；

b.2) 置$b=a^w \bmod u$；

b.3) 若$b=1$或$u-1$，转到步骤b.6)；

b.4) 对i从1到$v-1$执行：

b.4.1) 置$b=b^2 \bmod u$；

b.4.2) 若$b=u-1$, 转到步骤b.6)；

b.4.3) 若$b=1$，输出“合数”并终止；

b.4.4) 下一个i；

b.5) 输出“合数”, 并终止；

b.6) 下一个j；

c) 输出“概率素数”。

若算法输出“合数”，则u是一个合数。若算法输出“概率素数”， 则u是合数的概率小于2^{-2T}。这样，通过选取足够大的T，误差可以忽略。

D.2 有限域上的多项式

D.2.1 最大公因式

若$f(x)\neq 0$和$g(x)\neq 0$是系数在域F_q中的两个多项式，则唯一地存在次数最高的首一多项式$d(x)$，其系数在域F_q中且同时整除$f(x)$和$g(x)$。多项式$d(x)$称为$f(x)$和$g(x)$的最大公因子, 记为$\gcd(f(x), g(x))$。利用下面的算法(欧几里德算法)可计算出两个多项式的最大公因子。

输入：有限域F_q，F_q上的两个非零多项式 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$。

输出：$d(x)=\gcd(f(x), g(x))$。

a) 置$a(x)=f(x)$，$b(x)=g(x)$；

b) 当$b(x)\neq 0$时，循环执行：

b.1) 置$c(x)=a(x) \bmod b(x)$；

b.2) 置$a(x)=b(x)$；

b.3) 置$b(x)=c(x)$；

设α是$a(x)$的首项系数并输出$\alpha^{-1}a(x)$。

D.2.2 F_q上多项式不可约性的检测

设$f(x)$是F_q上的多项式，利用下面的算法可以有效地检测$f(x)$的不可约性。

输入：F_q上的首一多项式$f(x)$，素数q。

输出：若$f(x)$在F_q上不可约，则输出“正确”；否则，输出“错误”。

a) 置$u(x)=x$，$m=\deg(f(x))$；

b) 对i从1到$\lfloor m/2\rfloor$执行：

b.1) 计算$u(x)=u^q(x) \bmod f(x)$；

b.2) 计算$d(x)=\gcd(f(x)，u(x)-x)$；

b.3) 若$d(x)\neq 1$，则输出“错误”，并终止算法；

c) 输出“正确”。

D.3 椭圆曲线算法

D.3.1 椭圆曲线点的寻找

给定有限域上的椭圆曲线，利用下面的算法可有效地找出曲线上任意一个非无穷远点。

$E(F_p)$上点的寻找

输入：素数p, F_p上一条椭圆曲线E的参数a, b。
输出：$E(F_p)$上一个非无穷远点。

a) 选取随机整数x, $0 \le x < p$；
b) 置$\alpha = (x^3 + ax + b) \bmod p$；
c) 若$\alpha = 0$，则输出$(x, 0)$并终止算法；
d) 求$\alpha \bmod p$的平方根y (参见附录D.1.4.1)；
e) 若步骤 d) 的输出是“不存在平方根”，则返回步骤a)；
f) 输出(x, y)。

$E(F_{q^m})$ $(m\ge2)$上点的寻找

输入：有限域F_{q^m}(q为奇素数)， F_{q^m}上的椭圆曲线E的参数a, b。
输出：E上一个非无穷远点。

a) 随机选取F_{q^m}上元素x；
b) 在F_{q^m}上计算$\alpha = x^3 + ax + b$ ；
c) 若$\alpha = 0$，则输出$(x, 0)$并终止算法；
d) 在F_{q^m}上求α 的平方根y (参见附录D.1.4.3)；
e) 若步骤 d) 的输出是“不存在平方根”，则返回步骤a)；
f) 输出(x, y)。

D.3.2 椭圆曲线上l阶点的寻找

本算法可用于椭圆曲线l阶子群生成元的求取。
输入：椭圆曲线$E(F_q)$的参数a、b，曲线阶$\# E(F_q) = n = l\cdot r$，其中l为素数。
输出：$E(F_q)$上一个l阶点。

a) 用C.3.1的方法随机选取曲线上点Q；
b) 计算$P=[r]Q$；
c) 若$P=O$ ，返回步骤a)；
d) 输出P。

D.3.3 扭曲线上l阶点的寻找

设F_{q^m}上椭圆曲线E的方程：$y^2=x^3+ax+b$,其阶$\#E(F_{q^m})=q^m+1-t$,设其扭曲线E'的方程：$y^2=x^3+\beta^2\cdot ax+ \beta^3\cdot b$，$\beta$为$F_{q^m}$上非平方元，$E'(F_{q^m})$的阶$\#E'(F_{q^m})=q^m+1+t$。
输入：椭圆曲线$E(F_{q^m})$的扭曲线$E'(F_{q^m})$的参数a、b和β，扭曲线阶$\# E'(F_{q^m}) = n' = l\cdot r$，其中$l$为素数。
输出：$E'(F_{q^m})$上一个l阶点。

a) 用C.3.1的方法随机选取$E'(F_{q^m})$上点Q；
b) 计算$P=[r]Q$；
c) 若$P=O$ ，返回步骤a)；
   否则，P是l阶点；
d) 输出P。

参 考 文 献

[1] Abdalla M, Lange T, Eds. 2012. Pairing-Based Cryptography - Pairing 2012. Proceedings (2012), vol. 7708 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag

[2] Atkin A, Morain F. 1993. Elliptic Curves and Primality Proving, Mathematics of Computation 61(203)：29~68

[3] Barbulescu R, Gaudry P, Joux A, Thome E. 2014. A Heuristic Quasi-polynomial Algorithm for Discrete Logarithm in Finite Fields of Small Characteristic. In P. Q. Nguyen and E. Oswald, editors, Advances in Cryptology: Proceedings of EUROCRYPT '14, volume 8441 of LNCS, Springer-Verlag, 1~16

[4] Barreto P, Galbraith S, et al. 2004. Efficient Pairing Computation on Supersingular Abelian Varieties. Cryptology ePrint Archive, Report 2004/375

[5] Barreto P, Kim H, Lynn B, et al.2002. Efficient Algorithms for Pairing-based Cryptosystems, Proceedings of CRYPTO 2002, LNCS 2442. Springer-Verlag, 354~369

[6] Barreto P, Lynn B, Scott M. 2002. Constructing Elliptic Curves with Prescribed Embedding Degrees. In：Security in Communication Networks - SCN'2002, LNCS 2576. Springer-Verlag, 263~273

[7] Barreto P, Lynn B, Scott M. 2003. On the Selection of Pairing-friendly Groups. In：Selected Areas in Cryptography - SAC'2003, LNCS 3006. Ottawa, Canada：Springer-Verlag, 17~25

[8] Barreto P, Naehrig M. 2005. Pairing-friendly Elliptic Curves of Prime Order. Cryptology ePrint Archive, Report 2005/133

[9] Boneh D, Franklin M. 2001. Identity Based Encryption from the Weil-pairing, Proceedings of CRYPTO 2001,LNCS 2139. Springer-Verlag, 213~229

[10] Brezing F, Weng A. 2005. Elliptic Curves Sutable for Pairing Based Cryptography, Designs, Codes and Cryptography, 37：133~141

[11] Brickell E, Gordon D, Mccurley K, et al. 1993. Fast Exponentiation with Precomputation. In：Advances in Cryptology - EUROCRYPT’92, LNCS 658. Berlin：Springer-Verlag, 200~207

[12] Cao Zhenfu, Zhang Fanggou, Eds. 2013. Pairing-Based Cryptography - Pairing 2013. Proceedings (2013), vol. 8365 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag.

[13] Cha J C, Cheon J H. 2002. An Identity-based Signature from Gap Diffie-Hellman Groups, Proceedings of PKC 2002, LNCS 2567. Springer-Verlag, 18~30

[14] Cheng Qi, Wan Daqing and Zhuang Jincheng. 2014. Traps to the BGJT-Algorithm for Discrete Logarithms. ePrint 2014.

[15] Cheon, J. H. 2006. Security Analysis of the Strong Diffie-hellman Problem. In EURO-CRYPT (2006), S. Vaudenay, Ed., vol. 4004 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 1~11

[16] Duan P, Cui S, Wah Chan C. 2005. Special Polynomial Families for Generating More Suitable Elliptic Curves for Pairing-based Cryptosystems. Cryptology ePrint Archive, Report 2005/342

[17] Dupont R, Enge A, Morain F. 2005. Building Curves with Arbitrary Small MOV Degree over Finite Prime Fields, Journal of Cryptology, 18(2)：79~89

[18] Eisentrager K, Lauter K, Montgomery P. 2003. Fast Elliptic Curve Arithmetic and Improved

Weil-pairing Evaluation. In：Topics in Cryptology, CT-RSA03, LNCS 2612. Springer-Verlag, 343~354

[19] Freeman D. 2006. Constructing Pairing-friendly Elliptic Curves with Embedding Degree 10. In： Algorithmic Number Theory Symposium - ANTS-VII, LNCS 4076. Springer-Verlag, 452 ~465

[20] Freeman D, Scott M, Teske E. 2006. A Taxonomy of Pairing-friendly Elliptic Curves, Cryptology ePrint Archive Report 2006/372

[21] Frey G, Müller M, Rück H. 1999. The Tate-pairing and the Discrete Logarithm Applied to Elliptic Curve Cryptosystems, IEEE Transactions on Information Theory, 45(5)：1717~1719

[22] Galbraith S. 2001. Supersingular Curves in Cryptography, Proceedings of Asiacrypt 2001, LNCS 2248. Springer-Verlag, 495~513

[23] Galbraith S, Harrison K, Soldera D. 2002. Implementing the Tate-pairing, Proceedings of ANTSV, LNCS 2369. Springer-Verlag, 324~337

[24] Galbraith S , Paterson K, Eds. 2008. Pairing-Based Cryptography - Pairing 2008. Proceedings (2008), vol. 5209 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag.

[25] Googlu F, Granger R, McGuire G, and Zumbrael J. 2013. On the Function Field Sieve and the Impact of Higher Splitting Probabilities: Application to discrete logarithms in $F_{2^{1971}}$. Cryptology ePrint Archive, Report 2013/074.

[26] Hess F, Smart N, Vercauteren F. 2006. The Eta-pairing Revisited. Cryptology ePrint Archive, Report 2006/110

[27] IEEE P1363：2000 Standard for Public Key Cryptography

[28] ISO/IEC 15946-1：2002 Information Technology—Security Techniques—Cryptographic Techniques Based on Elliptic Curves — Part 1：General

[29] ISO/IEC 15946-2：2002 Information Technology—Security Techniques—Cryptographic Techniques Based on Elliptic Curves — Part 2：Digital Signatures

[30] ISO/IEC 15946-3：2002 Information Technology—Security Techniques—Cryptographic Techniques Based on Elliptic Curves — Part 3：Key Establishment

[31] ISO/IEC 15946-4：2003 Information Technology—Security Techniques—Cryptographic Techniques Based on Elliptic Curves — Part 4：Digital Signatures Giving Message Recovery

[32] ISO/IEC 14888-3：2004 Information Technology—Security Techniques—Digital Signatures with Appendix — Part 3：Discrete Logarithm Based Mechanisms

[33] ITU-T Recommendation X.680 Information Technology—Abstract Syntax Notation One (ASN.1)：Specification of Basic Notation(eqv ISO/IEC 8824-1)

[34] ITU-T Recommendation X.681 Information Technology—Abstract Syntax Notation One (ASN.1)：Information Object Specification(eqv ISO/IEC 8824-2)

[35] ITU-T Recommendation X.682 Information Technology—Abstract Syntax Notation One (ASN.1)：Constraint Specification(eqv ISO/IEC 8824-3)

[36] ITU-T Recommendation X.683 Information Technology—Abstract Syntax Notation One (ASN.1)：Parametrization of ASN.1 Specifications(eqv ISO/IEC 8824-4)

[37] ITU-T Recommendation X.690 Information Technology—ASN.1 Encoding Rules：Specification of Basic Encoding Rules (BER), Canonical Encoding Rules (CER) and Distinguished Encoding Rules (DER) (eqv ISO/IEC 8825-1)

[38] ITU-T Recommendation X.691 Information Technology—ASN.1 Encoding Rules：

Specification of Packed Encoding Rules (PER) (eqv ISO/IEC 8825-2)

[39] Joux A. 2013. Faster Index Calculus for the Medium Prime Case Application to 1175-bit and 1425-bit Finite Fields. In Advances in Cryptology EUROCRYPT 2013. Springer-Verlag, 177~193

[40] Joux A. 2013. A New Index Calculus Algorithm with Complexity L(1/4 + o(1))in Very Small characteristic. In Selected Areas in Cryptography-SAC 2013, volume 8282 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 355~382

[41] Joye M, Miyaji A, Otsuka A, Eds. 2010. Pairing-Based Cryptography - Pairing 2010. Proceedings (2010), vol. 6487 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag.

[42] Knuth D. 1981. The Art of Computer Programming(Vol 2). 2nd ed. Reading(MA)：Addison-Wesley

[43] Kobayashi T, Aoki K, Imai H. 2006. Efficient Algorithms for Tate-pairing. IEICE Trans. Fundamentals, E89-A

[44] Koblitz N. 1987. Elliptic Curve Cryptosystems. Mathematics of Computation, 48:203~209

[45] Lauter K, Montgomery P, Naehrig M. 2010. An Analysis of Affine Coordinates for Pairing Computation. Pairing-Based Cryptography - Pairing 2010. Proceedings (2010), vol. 6487 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag.

[46] Lay G, Zimmer H. 1994. Constructing Elliptic Curves with Given Group Order over Large Finite Fields, In：Algorithmic Number Theory Symposium-ANTS-1, LNCS 877. Springer-Verlag, 250~263 Menezes A. 1993. Elliptic Curve Public Key Cryptosystems. Boston：Kluwer Academic Publishers

[47] Lidl R, Niederreiter H. 1983. Finite Fields. Reading(MA)：Addison-Wesley Menezes A, Okamoto T, Vanstone S. 1993. Reducing Elliptic Curve Logarithms to Logarithms in a Finite Field. IEEE Transactions on Information Theory, 39：1639~1646

[48] Miller V. 2004. The Weil-pairing and its Efficient Calculation, Journal of Cryptology, 17：235~261

[49] Milne J. 2006. Complex Multiplication, http://www.jmilne.org/math

[50] Miyaji A, Nakabayashi M, Takano S. 2001. New Explicit Conditions of Elliptic Curve Traces for FR-reduction, IEICE Transactions on Fundamentals, E84-A(5)：1234~1243

[51] Müller V. 1995. Counting the Number of Points on Elliptic Curves over Finite Fields of Characteristic Greater than Three：[Doctorate Dissertation]. Saarlandes：University of Saarlandes

[52] Pollard J. 1978. Monte Carlo Methods for Index Computation mod p. Mathematics of Computation, 32：918~924

[53] Schoof R. 1985. Elliptic Curves over Finite Fields and the Computation of Square Roots mod p.Mathematics of Computation, 44(170)：483~494

[54] Scott M. 2005. Computing the Tate-pairing. In：CT-RSA, LNCS 3376. Springer-Verlag, 293~304

[55] Scott M. 2006, Implementing Cryptographic Pairings, ECC 2006

[56] Scott M, Barreto P. 2004. Compressed Pairings. In：Advances in Cryptology Crypto' 2004, LNCS 3152. Springer-Verlag, 140~156

[57] Scott M, Barreto P. 2006. Generating More MNT Elliptic Curves, Designs, Codes and Cryptography, 38：209~217

[58] Shacham H, Waters B, Eds. 2009. Pairing-Based Cryptography - Pairing 2009. Proceedings (2009), vol. 5671 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag

[59] Silverman J. 1986. The Arithmetic of Elliptic Curves. Berlin：Springer-Verlag, GTM 106

[60] Smart N. 1999. The Discrete Logarithm Problem on Elliptic Curves of Trace One. Journal of Cryptology, 12(3)：193~196

[61] Takagi T, Okamoto T, Okamoto E, and Okamoto T, Eds. 2007. Pairing-Based Cryptography - Pairing 2007. Proceedings (2007), vol. 4575 of Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag

[62] Thuen Ø. 2006. Constructing Elliptic Curves over Finite Fields Using Complex Multiplication, Master of Science in Physics and Mathematics

[63] ANSI X9.63-2001 Public Key Cryptography for the Financial Services Industry：Key Agreement and Key Transport Using Elliptic Curve Cryptography. American National Standards Institute

[64] ANSI X9.62-1999 Public Key Cryptography for the Financial Services Industry：The Elliptic Curve Digital Signature Algorithm (ECDSA). American National Standards Institute